SOBRE PARES DE FUNÇÕES DE GALOIS: UMA ADJUNÇÃO MOTIVADA PELAS TRADUÇÕES ENTRE LÓGICAS

ABOUT PAIR OF GALOIS FUNCTIONS: AN ADJUNCTION MOTIVATED BY TRANSLATIONS BETWEEN LOGICS

Hercules de Araujo Feitosa[1]
Mauri Cunha do Nascimento[2]
Cristiane Alexandra Lázaro[3]

Resumo: Apresentamos conceitos algébricos básicos e fundamentais para o desenvolvimento teórico dos pares de Galois. Então enunciamos as definições de pares de Galois e fazemos breves comparações entre os conceitos. Destacamos as adjunções, que caracterizam um caso de par de Galois e mostramos algumas de suas propriedades essenciais. Como resultado original, introduzimos uma conexão de Galois que envolve conceito abstrato e universal de tradução entre lógicas.

Palavras Chave: Pares de Galois, adjunções, conexões de Galois

Abstract: We present basic and fundamental algebraic concepts for the theoretical development of Galois pairs. Then we enunciate the definitions of Galois pairs and make brief comparisons between the concepts. We emphasize the adjunctions, which characterize a case of pair of Galois and we show some of its essential properties. As an original result, we introduce a Galois connection that involves abstract and universal concept of translation between logics.

Keywords: Galois pair, adjunctions, Galois Connections.

Introdução

Muito do pensamento matemático grego clássico era de natureza geométrica. Noções fundamentais de quantidades eram pensadas segundo a geometria, de modo que o conceito de número era vinculado ao conceito de comprimento de um segmento. Desta maneira, um número correspondia à construção de um segmento com comprimento identificado a esse número. As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números se faziam por construções geométricas, a partir de segmentos de retas e circunferências.

Estas construções eram feitas por régua sem marcação e compasso. A partir da unidade, eram construídos os números naturais, os números fracionários e alguns números irracionais construtíveis.

[1] UNESP - FC – Bauru. E-mail: hercules.feitosa@unesp.br
[2] UNESP - FC – Bauru. E-mail: mauri@fc.unesp.br
[3] UNESP - FC – Bauru. E-mail: Cristiane.lazaro@unesp.br

Neste ambiente surgiram os notáveis problemas da geometria grega, conhecidos como problemas clássicos, que desafiaram investigadores por milênios, pois algumas construções não podiam ser feitas apenas com a régua sem escala e o compasso (NASCIMENTO; FEITOSA, 2007).

Os três problemas mais famosos são os seguintes: 'a quadratura do círculo', que requer a construção de um quadrado com área igual à de um círculo dado; 'a duplicação do cubo', que pede a construção de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado; e 'a trissecção do ângulo', que solicita a construção um ângulo de medida igual a 1/3 da medida de um ângulo dado.

Algumas soluções são muito simples, mas os problemas pediam meios de resolver o problema para todo e qualquer caso indicado.

Estes problemas permaneceram insolúveis por muito tempo, perto de 2.200 anos. Somente a partir dos trabalhos de Évariste Galois [1811-1832] tais problemas puderam ser finalmente resolvidos.

Évariste Galois nasceu numa aldeia próxima de Paris, no período após a Revolução Francesa. Foi entusiasta do movimento revolucionário e aficionado pela matemática. Como matemático, enfrentou o problema da resolubilidade de equações polinomiais por meio de radicais. Assim como o conhecido algoritmo de Bháskara resolve qualquer equação do segundo grau, usando raízes dos coeficientes da equação, Galois buscou resolução para todas as equações de todos os graus acima de 2. Mais especificamente, para graus acima de 4.

Galois morreu num duelo no dia 30 de maio de 1832, quando tinha 20 anos de idade. Na noite que precedeu o duelo, Galois escreveu uma carta a um amigo com suas pesquisas e solicitou a pucação, que aconteceu no mesmo ano. Estes trabalhos de Galois permitiram respostas às indagações da resolubilidade de equações polinomiais por meio de radicais e que, em acréscimo, deu meios para a resolução dos famosos clássicos.

A partir do conceito de extensão de corpos, introduzidos por Galois, foi possível comprovar a impossibilidade de algumas construções com régua sem marcas e compasso. Vejamos alguns só uma palhinha, sem precisarmos compreender todos os detalhes (Nascimento, Feitosa, 2013).

Consideremos que K é um corpo, como o dos números racionais, e L é uma extensão finita de K, subcorpos dos números reais. Por L_K indicamos o conjunto de todos os corpos intermediários entre K e L, ordenados pela inclusão. Agora, consideremos o grupo de Galois de L sobre K, denotado por Gal(K, L), o conjunto de todos os automorfismos de L que fixam os elementos de K, e seja S(Gal(K, L)), o conjunto de todos os subgrupos de Gal(K, L), que são subgrupos normais, ordenados pela inclusão .

A Teoria de Galois mostra que a cada corpo F de L_K está associado um único grupo de S(Gal(K, L)) e que a cada grupo de S(Gal(K, L)) está associado um único corpo de L_K.

Temos, assim, um par de funções com sentidos invertidos:

$$f: L_k \to S(Gal(K, l)) \quad e \qquad g: S(Gal(K, l)) \to L_K.$$

Os pares de Galois que tratamos aqui são motivados pelo par de funções, dados acima. São pares de funções com sentidos invertidos e têm sido investigados no contexto das estruturas de ordem.

Surpreendentemente, eles surgem com enorme frequência no contexto matemático, com interesses muito distintos entre eles. Estas funções realçam alguns aspectos da ordenação e veremos um caso que envolve o conceito de lógica, mais precisamente de traduções entre lógicas. Veremos que cada tradução entre lógicas caracteriza um par de Galois.

Apresentamos inicialmente as noções algébricas essenciais para o desenvolvimento teórico destas noções sobre pares de Galois. Em seguida, apresentamos as definições de pares de Galois e fazemos algumas comparações entre os conceitos definidos.

Para justificarmos importantes propriedades dos pares de Galois, tomamos um par, as adjunções, e para elas demonstramos várias propriedades, as quais podem ser adaptadas para as outras definições de pares de Galois.

Introduzimos um exemplo de adjunção, que é um particular par de Galois.

Apresentaremos os conceitos essenciais e daremos uma pequena contribuição original.

1. Noções algébricas básicas

Nesta seção apresentamos conceitos algébricos básicos que serão usados para os desenvolvimentos posteriores (Nascimento, Feitosa, 2013).

***Definição 1.1*:** Uma relação binária $\leq$ sobre um conjunto A é uma ordem parcial se a relação é:

(i) reflexiva: para todo $a \in A$, temos que $a \leq a$,

(ii) antissimétrica: para todos a, b $\in$ A, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$,

(iii) transitiva: para todos a, b, c $\in$ A, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

Definição 1.2**:** Conjunto parcialmente ordenado (poset) é um par (A, $\leq$) em que A é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma ordem parcial sobre A.

Definição 1.3**:** Sejam (A, $\leq$) um poset e a, b $\in$ A. O supremo do par {a, b}, caso exista, é o elemento c $\in$ A que satisfaz:

(i) $a \leq c$ e $b \leq c$,

(ii) $a \leq d$ e $b \leq d \Rightarrow c \leq d$.

Definição 1.4**:** Sejam (A, $\leq$) um poset e a, b $\in$ A. O ínfimo do par {a, b}, caso exista, é o elemento e $\in$ A que satisfaz:

(i) $e \leq a$ e $e \leq b$,

(ii) $f \leq a$ e $f \leq b \Rightarrow f \leq e$.

Usualmente, denotamos o supremo de {a, b} por sup{a, b} ou por $a \vee b$, e o ínfimo de {a, b} por inf{a, b} ou por $a \wedge b$. O supremo de {a, b} é o menor limitante superior de {a, b} e o ínfimo de {a, b} e o maior limitante inferior de {a, b}.

Definição 1.5**:** Seja (R, $\leq$) um poset tal que para quaisquer a, b $\in$ R existe o inf{a, b} e o sup{a, b}. Denominamos de reticulado à estrutura algébrica determinada por (R,$\wedge$, $\vee$) em que $a \wedge b$ = inf{a, b} e $a \vee b$ = sup{a, b}.

Definição 1.6**:** Seja f:(A, $\leq_A$) $\rightarrow$ (P, $\leq_P$) uma função entre dois conjuntos parcialmente ordenados. Dizemos que a função f:

(i) preserva as ordens se $a \leq_A b \Rightarrow f(a) \leq_P f(b)$

(ii) inverte as ordens se $a \leq_A b \Rightarrow f(b) \leq_P f(a)$.

No contexto da análise, usualmente estas funções são chamadas de crescente e decrescente, respectivamente. Mas é menos usual esta denominação nos contextos dos pares de Galois. Outras vezes elas são chamadas de isótonas e antítonas. A primeira também ocorre com o nome de monótona.

***Definição 1.7*:** Se f: $(A, \leq) \rightarrow (A, \leq)$, então:

(i) a função f é idempotente se fof = f,

(ii) a função f é extensiva ou inflacionária se para todo $a \in A$, $a \leq f(a)$,

(iii) a função f é deflacionária se para todo $a \in A$, $f(a) \leq a$.

***Definição 1.8*:** Se f: $(A, \leq) \rightarrow (A, \leq)$, então a função f é um:

(i) operador de Tarski (operador do fecho dedutivo), se f é extensiva (ou inflacionária), preserva ordens e é idempotente,

(ii) operador de interior se f é deflacionária, preserva ordens e é idempotente.

2. Pares de Galois

A seguir, apresentamos os pares de Galois. Há variações de definição e desenvolvimento destes conceitos. Sugerimos como fontes (Dunn, Hardegree, 2001), (Ore, 1944) e (Smith, 2010).

***Definição 2.1*:** Se $(A, \leq_A)$ e $(P, \leq_P)$ são conjuntos parcialmente ordenados, $a \in A$ e $p \in P$ são elementos quaisquer e f: $A \rightarrow P$ e g: $P \rightarrow A$ são funções, então:

(i) o par (f, g) é uma conexão de Galois se: $a \leq_A g(p) \Leftrightarrow p \leq_P f(a)$

(ii) o par $(f, g)^d$ é uma conexão dual de Galois se: $g(p) \leq_A a \Leftrightarrow f(a) \leq_P p$

(iii) o par [f, g] é uma adjunção se: $a \leq_A g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq_P p$

(iv) o par $[f, g]^d$ é uma adjunção dual se: $g(p) \leq_A a \Leftrightarrow p \leq_P f(a)$.

O nome adjunção vem da teoria das categorias. Em muitos textos sobre o tema, o par [f, g] também é chamado de residuado.

Se $(A, \leq_A)$ é um conjunto parcialmente ordenado, então denotaremos a ordem inversa de $\leq_A$ por $\leq^{op}_A$ e, desse modo, $(A, \leq^{op}_A) = (A, (\leq_A)^{-1})$. Assim, $a \leq_A b \Leftrightarrow b \leq^{op}_A a$.

Para $(A, \leq_A)$ e $(P, \leq_P)$ conjuntos parcialmente ordenados e $f: A \to P$ e $g: P \to A$ funções, temos:

(1) Se (f, g) é uma conexão de Galois, então (g, f) é também uma conexão de Galois.

(2) Se $(f, g)^d$ é uma conexão dual de Galois, então $(g, f)^d$ é também uma conexão dual de Galois.

(3) Se $[f, g]$ é uma adjunção, então $[g, f]^d$ é uma adjunção dual.

(4) Se $[f, g]^d$ é uma adjunção dual, então $[g, f]$ é uma adjunção.

Se (f, g) é uma conexão de Galois para $(A, \leq_A)$ e $(P, \leq_P)$, então:

(5) $(f, g)^d$ é uma conexão dual de Galois para $(A, \leq^{op}{}_A)$ e $(P, \leq^{op}{}_P)$.

(6) $[f, g]$ é uma adjunção para $(A, \leq_A)$ e $(P, \leq^{op}{}_P)$.

(7) $[f, g]^d$ é uma adjunção dual para $(A, \leq^{op}{}_A)$ e $(P, \leq_P)$.

A seguir, destacamos as adjunções, como um caso de par de Galois. Demonstramos vários resultados sobre as adjunções. Estes resultados, com as devidas particularidades, podem ser adaptados aos demais pares de Galois.

3. Adjunções

Nesta seção, tomamos um dos pares de Galois, as adjunções, e mostramos muitas de suas propriedades.

Em alguns textos sobre os pares de Galois, as adjunções são chamadas de conexões de Galois, como em (Smith, 2010). Mas a nossa escolha do nome de conexão de Galois está de acordo com a original Teoria de Galois.

Seguimos a apresentação de (Dunn, Hardegree, 2001) e (Orlowska, Rewitzky, 2010).

***Definição 3.1*:** Dados dois conjuntos parcialmente ordenados $(A, \leq_A)$ e $(P, \leq_P)$ e as funções $f: A \to P$ e $g: P \to A$, o par $[f, g]$ é uma adjunção de Galois quando para todo $a \in A$ e todo $p \in P$ vale $a \leq_A g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq_P p$.

Quando não necessário, não indicaremos as ordens com os índices e escreveremos apenas $\leq$.

A proposição seguinte nos dá condições para termos uma adjunção.

***Proposição 3.2*:** Sejam $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$ duas ordens parciais, $f: A \rightarrow P$ e $g: P \rightarrow A$ funções, $a, b \in A$ e $p, q \in P$. O par $[f, g]$ é uma adjunção se, e somente se, valem as condições:

(i) $a \leq g(f(a))$

(ii) $f(g(p)) \leq p$

(iii) $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

(iv) $p \leq q \Rightarrow g(p) \leq g(q)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) (i) Como $f(a) \leq f(a)$ e $[f, g]$ é uma adjunção, então $f(a) \leq f(a) \Leftrightarrow a \leq g(f(a))$. Logo, $a \leq g(f(a))$.

(ii) Como $g(p) \leq g(p)$ e $[f, g]$ é uma adjunção, então $g(p) \leq g(p) \Leftrightarrow f(g(p)) \leq p$. Logo, $f(g(p)) \leq p$.

(iii) Seja $a \leq b$. Por (i), $b \leq g(f(b))$ e, então, $a \leq g(f(b))$. Desde que $[f, g]$ é uma adjunção, então $a \leq g(f(b)) \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$. Logo, $f(a) \leq f(b)$.

(iv) Seja $p \leq q$. Por (ii), $f(g(p)) \leq p$ e, então, $f(g(p)) \leq q$. Desde que $[f, g]$ é uma adjunção, então $f(g(p)) \leq q \Leftrightarrow g(p) \leq g(q)$. Logo, $g(p) \leq g(q)$.

($\Leftarrow$) $a \leq g(p) \Rightarrow f(a) \leq f(g(p)) \Rightarrow f(a) \leq p \Rightarrow g(f(a)) \leq g(p) \Rightarrow a \leq g(p)$. Assim, $a \leq g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq p$. ■

Diante desta proposição, temos outra maneira de caracterizarmos uma adjunção. O par $[f, g]$ é uma adjunção se as funções f e g preservam as ordens e as compostas gof e fog são, respectivamente, inflacionária e deflacionária.

***Corolário 3.3*:** Se o par $[f, g]$ é uma adjunção para as ordens parciais $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$, então: $f(a) = f(g(f(a)))$ e $g(b) = g(f(g(b)))$.

Demonstração: De (i), $a \leq g(f(a))$ e então, por (iii), $f(a) \leq f(g(f(a)))$. Mas, por (ii), $f(g(f(a))) \leq f(a)$. Assim, $f(a) = f(g(f(a)))$. A outra igualdade se verifica de modo análogo. ■

***Corolário 3.4*:** Se o par $[f, g]$ é uma adjunção para $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$, então as duas composições gof e fog são operadores de Tarski e de interior, respectivamente, sobre A e P.

Demonstração: Por (i), para todo $a \in A$, $a \leq g(f(a))$. Agora, se $a \leq b$, então $f(a) \leq f(b)$ e, daí, $g(f(a)) \leq g(f(b))$. Como, pela proposição anterior, $f(g(f(a))) = f(a)$, então $g(f(g(f(a)))) =$

g(f(a)). Logo, gof é um operador de Tarski sobre A. De modo análogo, verificamos o caso da composição fog. ■

***Exemplo 3.5*:** Seja R uma relação entre os conjuntos E e F, isto é, $R \subseteq E \times F$, e consideremos então as seguintes relações de ordem $(P(E), \subseteq)$ e $(P(F), \subseteq)$. Agora, definamos as seguintes funções: $f: P(E) \to P(F)$ dada por $f(A) = \{y \in F : (\exists x \in A)(xRy)\}$, e $g: P(F) \to P(E)$ dada por $g(B) = \{x \in E : (\forall y)(xRy \Rightarrow y \in B\}$.

Mostraremos que [f, g] é uma adjunção. Para tanto, devemos verificar que (i) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$, (ii) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow g(B_1) \subseteq g(B_2)$, (iii) $f(g(B)) \subseteq B$, (iv) $A \subseteq g(f(A))$, conforme Proposição 3.2.

(i) Consideremos então que $A_1 \subseteq A_2$. Se $y \in f(A_1)$, então $(\exists x \in A_1)(xRy)$. Da hipótese, temos que $(\exists x \in A_2)(xRy)$ e, portanto, $y \in f(A_2)$. Logo $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

(ii) Consideremos que $B_1 \subseteq B_2$. Se $x \in g(B_1)$, então $(\forall y)(xRy \Rightarrow y \in B_1)$. Da hipótese, temos que $(\forall y)(xRy \Rightarrow y \in B_2)$ e, portanto, $x \in g(B_2)$. Logo $g(B_1) \subseteq g(B_2)$.

(iii) Se $y \in f(g(B))$, então existe $x \in g(B)$ tal que xRy. Agora, se xRy e $x \in g(B)$, então $y \in B$. Logo, $f(g(B)) \subseteq B$.

(iv) Suponhamos que $A \not\subset g(f(A))$. Então existe $x \in A$ tal que $x \notin g(f(A))$. Daí, não é o caso que $(\forall y)(xRy \Rightarrow y \in f(A))$. Logo, existe y tal que xRy e $y \notin f(A)$. De $y \notin f(A)$, temos que não é o caso que existe x tal que xRy, o que contradiz a afirmação anterior.

***Exemplo 3.6*:** Como um caso particular do exemplo anterior, consideremos que E = F e R é uma ordem parcial ≤ sobre E. Então $f: P(E) \to P(E)$ é definida por $f(A) = \{y \in E : (\exists x \in A)(x \leq y)\}$, que consiste de todos os elementos de E que majoram algum elemento de A, e $g: P(E) \to P(E)$ é definida por $g(B) = \{x \in E : (\forall y)(x \leq y \to y \in B)\}$, que consiste de todos os elementos de E que não majoram qualquer elemento de B.

***Exemplo 3.7*:** Consideremos uma função $h: E \to F$ e as relações de ordem $(P(E), \subseteq)$ e $(P(F), \subseteq)$.

Definamos então a imagem direta via h por $f: P(E) \to P(F)$ com $f(A) = \{y \in F : \exists x \in A \text{ e } h(x) = y\}$, e a imagem inversa via h por $g: P(F) \to P(E)$ com $g(B) = \{x \in E : y \in B \text{ e } h(x) = y\}$.

Devemos verificar que [f, g] é uma adjunção. Mas este é um subcaso do Exemplo 3.5, quando $R = h = \{(x, h(x)) : x \in E\}$, $f(A) = h(A)$ e $g(B) = h^{-1}(B)$.

***Proposição 3.8*: Se o par [f, g] é uma adjunção para os reticulados $(A, \wedge, \vee)$ e $(P, \wedge, \vee)$, então valem:

(i) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$,

(ii) $g(x \wedge y) = g(x) \wedge g(y)$.

Demonstração: (i) Como $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$, então $f(x) \leq f(x \vee y)$ e $f(y) \leq f(x \vee y)$, donde segue que $f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y)$. Por outro lado, $f(x) \leq f(x) \vee f(y)$ e $f(y) \leq f(x) \vee f(y)$, donde segue que $x \leq g(f(x)) \leq g(f(x) \vee f(y))$ e $y \leq g(f(y)) \leq g(f(x) \vee f(y))$. Assim, $x \vee y \leq g(f(x) \vee f(y))$. Logo $f(x \vee y) \leq f(g(f(x) \vee f(y)) \leq f(x) \vee f(y)$.

(ii) É análoga. ∎

***Proposição 3.9*: Se $[f, g_1]$ e $[f, g_2]$ são adjunções para $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$, então: $g_1 = g_2$. Também, se $[f_1, g]$ e $[f_2, g]$ são adjunções para $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$, então: $f_1 = f_2$.

Demonstração: Dado $p \in P$, como g_1 e g_2 são funções, então estão definidos $g_1(p)$ e $g_2(p)$. Da Definição de adjunção segue que: (i) $g_1(p) \leq g_2(p) \Leftrightarrow f(g_1(p)) \leq p$ e (ii) $g_2(p) \leq g_1(p) \Leftrightarrow f(g_2(p)) \leq p$. Como pela Proposição 3.2, $f(g_1(p)) \leq p$ e $f(g_2(p)) \leq p$ então $g_1(p) \leq g_2(p)$ e $g_2(p) \leq g_1(p)$. Portanto, $g_1(p) = g_2(p)$. Como isto vale para todo $p \in P$, então $g_1 = g_2$.

A outra demonstração é análoga a esta. ∎

***Proposição 3.10*: Se o par [f, g] é uma adjunção para $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$, então valem:

(i) $a \in g(P) \Leftrightarrow g(f(a)) = a$

(ii) $p \in f(A) \Leftrightarrow f(g(p)) = p$

(iii) $f(A) = f(g(P))$

(iv) $g(P) = g(f(A))$.

Demonstração: (i) Segue da Proposição 3.3: $(\Rightarrow)$ Se $a \in g(P)$, então existe $p \in P$ tal que $g(p) = a$. Daí, $g(f(a)) = g(f(g(p))) = g(p) = a$. $(\Leftarrow)$ Se $g(f(a)) = a$, então para $b = f(a)$ temos que $g(b) = a$ e, portanto, $a \in g(P)$.

(ii) É análoga.

(iii) Se $p \in f(A)$, por (ii), $p = f(g(p))$ e, portanto, $p \in f(g(P))$. Logo $f(A) \subseteq f(g(P))$. Agora, se $p \in f(g(P))$, então $p = f(a)$ para algum $a \in g(P) \subseteq A$. Assim, $p \in f(A)$ e $f(g(P)) \subseteq f(A)$. Portanto, $f(A) = f(g(P))$.

(iv) É análoga. ■

Assim, cada ponto $a \in g(P)$ é ponto fixo da função gof e cada ponto $p \in f(A)$ é ponto fixo da função fog.

***Proposição 3.11*:** Se o par $[f, g]$ é uma adjunção para $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$, então:

(i) $f(a) = \min\{p \in P: a \leq g(p)\}$

(ii) $g(p) = \max\{a \in A: f(a) \leq p\}$.

Demonstração: (i) Dado $a \in A$, como pela Proposição 3.2 $a \leq g(f(a))$, então $f(a) \in \{p \in P: a \leq g(p)\}$. Agora, se $c \in \{p \in P: a \leq g(p)\}$, então $a \leq g(c)$ e daí $f(a) \leq f(g(c))$. Como $f(g(c)) \leq c$, pela Proposição 3.2, portanto, $f(a) \leq c$. Logo, $f(a) = \min\{p \in P: a \leq g(p)\}$.

(ii) Dado $p \in P$, como pela Proposição 3.2 $f(g(p)) \leq p$, então $g(p) \in \{a \in A: f(a) \leq p\}$. Agora, se $c \in \{a \in A: f(a) \leq p\}$, então $f(c) \leq p$ e daí $g(f(c)) \leq g(p)$ e, portanto, $c \leq g(p)$, pois pela Proposição 3.2, $c \leq g(f(c))$. Logo, $g(p) = \max\{a \in A: f(a) \leq p\}$. ■

***Proposição 3.12*:** Se $[f_1,g_1]$ é uma adjunção para $(A,\leq)$ e $(B,\leq)$ e $[f_2,g_2]$ é uma adjunção para $(B,\leq)$ e $(C,\leq)$, então $[f_2of_1,g_1og_2]$ é uma adjunção para $(A,\leq)$ e $(C,\leq)$.

Demonstração: $a \leq g_1og_2(c) = g_1(g_2(c)) \Leftrightarrow f_1(a) \leq g_2(c) \Leftrightarrow f_2(f_1(a)) \leq c \Leftrightarrow f_2of_1(a) \leq c$. ■

Cada par de Galois tem resultados semelhantes a estes sobre as adjunções. Nos quadros seguintes, faremos uma síntese dos resultados principais para cada par.

Sejam $(A,\leq)$ e $(P,\leq)$ conjuntos parcialmente ordenados, $a \in A$ e $p \in P$ elementos quaisquer e $f: A \to P$ e $g: P \to A$ funções.

(f, g) conexão de $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$
$a \leq g(p) \Leftrightarrow p \leq f(a)$
f e g invertem as ordens
fog e gof são inflacionárias

$(f, g)^d$ conexão dual de $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$
$g(p) \leq a \Leftrightarrow f(a) \leq p$
f e g invertem as ordens
fog e gof são deflacionárias

fog e gof são operadores de Tarski
$fogof = f$ e $gofog = g$
$f(a) = \max\{p \in P : a \leq g(p)\}$
$g(p) = \max\{a \in A : p \leq f(a)\}$

fog e gof são operadores de interior
$fogof = f$ e $gofog = g$
$f(a) = \min\{p \in P : g(p) \leq a\}$
$g(p) = \min\{a \in A : f(a) \leq p\}$

$[f, g]$ adjunção de $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$
$a \leq g(p) \Leftrightarrow f(a) \leq p$
f e g preservam as ordens
fog é deflacionária e gof é inflacionária
fog e gof são respectivamente operadores de interior e de Tarski
$fogof = f$ e $gofog = g$
$f(a) = \min\{p \in P : a \leq g(p)\}$
$g(p) = \max\{a \in A : f(a) \leq p\}$

$[f, g]^d$ adjunção dual de $(A, \leq)$ e $(P, \leq)$
$g(p) \leq a \Leftrightarrow p \leq f(a)$
f e g preservam as ordens
fog é inflacionária e gof é deflacionária
fog e gof são respectivamente operadores de Tarski e de interior
$fogof = f$ e $gofog = g$
$f(a) = \max\{p \in P : g(p) \leq a\}$
$g(p) = \min\{a \in A : p \leq f(a)\}$

A seguir, introduzimos um exemplo de adjunção que vem de desenvolvimentos da lógica, vistas aqui numa versão abstrata e universal.

4. Adjunção vinda do conceito de tradução entre lógicas

Veremos como o conceito de tradução entre lógicas nos permite gerar uma adjunção sobre espaços de Tarski.

Para tanto, precisamos introduzir conceitos sobre traduções no contexto pretendido, conforme (SILVA; D'OTTAVIANO e SETTE, 1999) e (FEITOSA; D'OTTAVIANO, 2001).

As primeiras traduções entre lógicas surgiram no início do século XX. São funções definidas do conjunto de fórmulas de uma lógica no conjunto de fórmulas de uma segunda lógica, com a intenção de preservar propriedades de uma para a outra. Nos primeiros casos, foram usadas para garantir a consistência de uma lógica relativa à outra. Muitos autores fizeram este caminho, conforme indicam os textos mencionados acima.

Da Silva, D'Ottaviano e Sette (1999), iniciaram um estudo geral de inter-relações entre lógicas, com uma definição de tradução que deveria preservar a essência de um sistema lógico, a dedutibilidade.

Contudo precisaram dizer o que seria, para este desenvolvimento, uma lógica. Apresentamos alguns destes desenvolvimentos nos próximos parágrafos.

Provas dos resultados sobre traduções podem ser encontrados em (FEITOSA, D'OTTAVIANO, 2001).

***Definição 4.1*:** Uma lógica é um par $\mathscr{L} = (L, C)$, em que L é o domínio de $\mathscr{L}$ e C é um operador de consequência de Tarski sobre L.

Esta é uma definição muito geral e abstrata de lógica. São lógicas de Tarski e caracterizam um tema de estudo na Lógica chamado de Lógica Universal.

***Definição 4.2*:** O operador de consequência C é finitário se, para todo $B \subseteq L$, tem-se que $C(B) = \cup\{C(B_f) : B_f$ é subconjunto finito de $B\}$.

Podemos definir os operadores de consequência induzido e co-induzido.

Definição 4.3: Seja $\mathscr{L} = (L, C)$ uma lógica e A e B conjuntos quaisquer. Para a função $f: L \to B$, o operador de consequência co-induzido por f e $\mathscr{L}$ sobre B, é C_B tal que cada $D \subseteq B$ é fechado em (B, C_B) se $f^{-1}(D)$ é um fechado de $\mathscr{L}$. E para a função $g: A \to L$, o operador de consequência C_A induzido por $\mathscr{L}$ e g sobre A é tal que cada $E \subseteq A$ é fechado em (A, C_A) se existe um conjunto fechado D de $\mathscr{L}$ tal que $E = g^{-1}(D)$.

Agora a definição e resultados sobre traduções entre lógicas.

***Definição 4.4*:** Uma tradução da lógica $\mathscr{L}_1 = (L_1, C_1)$ na lógica $\mathscr{L}_2 = (L_2, C_2)$ é uma função $t: L_1 \to L_2$ tal que, para $B\cup\{b\} \subseteq L_1$:

$$b \in C_1(B) \Rightarrow t(b) \in C_2(t(B)).$$

De acordo com a notação mais usual da Lógica, podemos escrever esta condição por:

$$B \vdash_1 b \Rightarrow t(B) \vdash_2 t(b),$$

em que $\vdash_1$ e $\vdash_2$ denotam as relações de consequência lógica de $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$, respectivamente.

Proposição 4.5**:** Uma função t: $L_1 \to L_2$ é tradução se, e somente se, para todo $A \subseteq L_1$, tem-se que $t(C_1(A)) \subseteq C_2(t(A))$. ■

Proposição 4.6: A composição de traduções é uma tradução, a função identidade entre lógicas é tradução, a composição de traduções é associativa, a função identidade é a unidade para a composição de traduções.

■

Proposição 4.7: Se t é uma função da lógica $\mathscr{L}_1$ na lógica $\mathscr{L}_2$, então as seguintes condições são equivalentes:

(i) t é uma tradução

(ii) a imagem inversa de cada conjunto fechado de $\mathscr{L}_2$ é um fechado de $\mathscr{L}_1$

(iii) a imagem inversa de cada conjunto aberto de $\mathscr{L}_2$ é um aberto de $\mathscr{L}_1$

(iv) para todo $B \subseteq L_2$, tem-se que $C_1(t^{-1}(B)) \subseteq t^{-1}(C_2(B))$. ■

Definição 4.8**:** Uma função entre duas lógicas t: $\mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ é fechada quando leva conjuntos fechados de $\mathscr{L}_1$ em conjuntos fechados de $\mathscr{L}_2$.

Proposição 4.9**:** Uma função t: $\mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ é fechada se, e somente se, para todo $A \subseteq L_1$, tem-se que $C_2(t(A)) \subseteq t(C_1(A))$. ■

Proposição 4.10**:** Uma tradução t: $\mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ é uma função fechada se, e somente se, para todo $A \subseteq L_1$, segue-se que $t(C_1(A)) = C_2(t(A))$. ■

Definição 4.11**:** Duas lógicas $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ são $\mathscr{L}$-homeomorfas se existe uma função bijetiva t: $L_1 \to L_2$, tal que t e t^{-1} são traduções. Neste caso, a função t é denominada $\mathscr{L}$-homeomorfismo.

Proposição 4.12**:** Seja t: $\mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ uma função bijetiva. A função t é um $\mathscr{L}$-homeomorfismo se, e somente se, para todo $A \subseteq L_1$, tem-se $t(C_1(A)) = C_2(t(A))$. ■

Definição 4.13: Sejam C e C_0 dois operadores de consequência sobre L. O operador C é mais forte que C_0 ou C_0 é mais fraco que C se todo conjunto fechado segundo C é também um fechado segundo C_0.

Proposição 4.14: Sejam C e C_0 dois operadores de consequência sobre L. O operador C é mais forte que C_0 se, e somente se, para todo $A \subseteq L$, $C_0(A) \subseteq C(A)$. ■

Proposição 4.15: Se $\mathscr{L}$ é uma lógica, B é um conjunto, t: L $\rightarrow$ B é uma função e C_B é o operador de consequência co-induzido por $\mathscr{L}$ e t em B, então C_B é o mais fraco operador de consequência. ■

Proposição 4.16: Se $\mathscr{L}$ é uma lógica, A é um conjunto, t: A $\rightarrow$ L é uma função e C_A é o operador de consequência induzido por $\mathscr{L}$ e t em A, então C_A é o mais forte operador de consequência que faz de t uma tradução. ■

Agora estamos em condição de explicitar a adjunção pretendida, que é motivada por uma tradução entre lógicas.

Consideremos duas lógicas $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ e uma tradução t: $L_1 \rightarrow L_2$. Agora, indiquemos as coleções de todas as teorias ou conjuntos fechados de $\mathscr{L}_1$ e $\mathscr{L}_2$ por $F(\mathscr{L}_1)$ e $F(\mathscr{L}_2)$, respectivamente. Sejam f: $F(\mathscr{L}_1) \rightarrow F(\mathscr{L}_2)$ definida por $f(D) = C_2(t(D))$ e g: $F(\mathscr{L}_2) \rightarrow F(\mathscr{L}_1)$ definida por $g(E) = t^{-1}(E)$.

Teorema 4.17: O par [f, g], definido acima, é uma adjunção para $(F(\mathscr{L}_1), \subseteq)$ e $(F(\mathscr{L}_2), \subseteq)$.
Demonstração: Pela Proposição 3.2, devemos mostrar que f e g preservam ordem, fog é deflacionária e gof é inflacionária.

Se A, B $\in F(\mathscr{L}_1)$ e $A \subseteq B$, então $t(A) \subseteq t(B)$ e $C_2(t(A)) \subseteq C_2(t(B))$, isto é, $f(A) \subseteq f(B)$ e, portanto, f preserva ordem.

Se P, Q $\in F(\mathscr{L}_2)$ e $P \subseteq Q$, então $t^{-1}(P) \subseteq t^{-1}(Q)$, isto é, $g(P) \subseteq g(Q)$ e, portanto, g preserva ordem.

Agora, dado $A \in F(\mathscr{L}_1)$, temos que $A \subseteq t^{-1}(t(A)) \subseteq t^{-1}(C_2(t(A))) = g(C_2(t(A))) = g(f(A))$. Logo, gof é inflacionária.

Dado $P \in F(\mathscr{L}_2)$, como $t(t^{-1}(P)) \subseteq P$, temos que $f(g(P)) = f((t^{-1}(P)) = C_2(t(t^{-1}(P)) \subseteq C_2(P) = P$. Logo, fog é deflacionária. ■

Considerações finais

Os pares de Galois são muito frequentes nos contextos matemáticos. Temos aqui mais um exemplo.

O conceito de conexão de Galois surge dos desenvolvimentos originais de Galois para resolver o problema de soluções de uma equação algébrica por meio de radicais. Para isso, relacionam-se extensões de corpos com grupos de automorfismos, como citado na introdução, e com isso, para cada extensão tem-se um grupo e, para cada grupo, tem-se uma extensão.

Esta é uma técnica recorrente na Matemática, usamos uma função, que pode ser denominada de redução, para transpor um problema de um ambiente em que a solução não é fácil, ou pelo menos não é conhecida, para outro em que a solução é possível e tratável. Naturalmente, precisamos retornar ao ambiente original para a solução do problema dado.

A partir do contexto inicial, algebristas generalizaram o conceito de conexão de Galois para funções entre estruturas de ordem, como apresentado nestas notas. Neste contexto estendido e algébrico pudemos ampliar as conexões de Galois para os pares de Galois, também tratados aqui.

Então, temos reconhecido muitos pares de Galois na literatura matemática. Os textos da bibliografia apontam muitos deles e nós damos um exemplo adicional neste artigo.

Os pares de Galois surgem na Definição 2.1 correlacionando as ordens. Como um passo futuro, ao olharmos para a Proposição 3.2, percebemos que podemos fazer outras composições e obtermos mais que quatro pares de Galois. Seria interessante investigar sobre estas outras combinações possíveis. Temos algum desenvolvimento sobre estas possibilidades, mas ainda estamos na elaboração teórica. Estes resultados virão posteriormente.

Agradecimentos

Agradecemos apoio recebido da FAPESP e do CNPq.

Referências

DA SILVA, J. J., D'OTTAVIANO, I. M. L., SETTE, A. M. Translations between logics. In: Caicedo, X., Montenegro, C.H. (eds.) *Models, Algebras and Proofs*. Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics, v. 203, p. 435-448. New York: Marcel Dekker, 1999.
D'OTTAVIANO, I. M. L., FEITOSA, H. A. Deductive systems and translations. In: Jean-Yvez Bé ziau, Alexandre Costa Leite (Org.). *Perspectives on universal logic,* p. 125-157. Monza: Polimetrica International Scientific Publisher, 2007.
DUNN, J. M., HARDEGREE, G. M. *Algebraic methods in philosophical logic*. Oxford: Oxford University Press, 2001.
EBBINGHAUS, H. D., FLUM, J., THOMAS, W. *Mathematical logic*. New York: Springer-Verlag, 1984.
FEITOSA, H. A., D'OTTAVIANO, I. M. L. Conservative translations. *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 108, p. 205-227, 2001.
FEITOSA, H. A., GRACIO, M. C. C., NASCIMENTO, M. C. Logic TK: algebraic notions from Tarki's consequence operator. *Principia*, v. 14, p. 47-70, 2010.
FEITOSA, H. A., PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora, UNESP, 2005.
HERRLICH, H., HUSEK, M. Galois connections categorically. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 68, p. 165-180, 1990.
MIRAGLIA, F. *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*, 1987. Campinas: UNICAMP/CLE. (Coleção CLE, v. 1)
NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. Os três problemas clássicos da antiguidade. *Revista Ciência e Tecnologia*, v. X, p. 61-64, 2007.
NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. *Estruturas Algébricas*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2013.
ORE, O. Galois connections. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 55, p. 493-513, 1944.
ORLOWSKA, E., REWITZKY, I. Algebras for Galois-style connections and their discrete duality. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 161, p. 1325-1342, 2010.
SMITH, P. *The Galois connection between syntax and semantics*. Technical report. Cambridge: Univisity of Cambridge, 2010.

Recebido em: 14/09/2019
Aprovado em: 12/11/2019