A NOÇÃO DE ESPAÇO E AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

*Luis Gustavo Seleghin dos Santos**

RESUMO: As primeiras pinturas rupestres, com conteúdo geométrico, datam de vinte e cinco mil anos atrás. Já no âmbito histórico, ao longo das civilizações, o homem percebeu a aparente relação da forma e do comportamento da natureza com o universo das inferências numéricas, podendo, dessa forma, ter uma previsibilidade acerca do futuro e uma retro-visão que permite, a partir do presente, inquirir o passado. A matemática parecia ser o espelho do real e o espaço euclidiano, que talvez fosse o maior exemplo disso, permaneceu inquestionado por séculos, até a reformulação de seu quinto postulado, iniciada por John Playfair, abrir caminho para homens como Lobatchewski, Bolyai e Riemann criarem novas geometrias a partir de transgressões do postulado das paralelas. A questão então era saber até que ponto tais criações poderiam ser consistentes, o que culminaria com a afirmação de que tais geometrias eram tão consistentes quanto a de Euclides. A univocidade do conceito de espaço estava ameaçada. É o que pretende discutir o presente trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: geometria, espaço, consistência.

ABSTRACT**:** The first cave paintings with geometric content date back to twenty-five thousand years ago. Concerning the historical ambit, throughout the civilizations men realized the apparent relation between the form and behavior of nature and the universe of numerical inferences, thus being able to have a foreseeability concerning the future and a retro view which allows inquiring the past from the present. Mathematics seemed to be the mirror of the real and the Euclidian space, which perhaps was the greatest example of it, remained unquestioned for centuries, until the reformulation of its fifth principle, started by John Playfair, made way for men like Lobatchevski, Bolyai and Riemann to create new geometries from transgressions of the parallel principle. The point was to know in what extent such creations could be consistent, which would culminate with the statement that such geometries were as much consistent as Euclide's. The univocity of the space concept was threatened. This is what this work intends to discuss.

KEYWORDS: geometry, space, consistency.

Introdução

A idéia de espaço nos acompanha desde a pré-história. Os registros rupestres mais antigos, que possuem motivação geométrica, datam de cerca de vinte e cinco mil anos a. C. Já no seio da antiguidade oriental, seja no Egito, com o papiro de Moscou, seja nas tabletas cuneiformes dos mesopotâmicos, as diversas civilizações hidráulicas trataram do espaço como forma de controlar os grandes rios, que garantiam subsistência às populações que prosperavam nos vales do crescente fértil. Por outro lado, a existência de uma classe, oligárquica ou sacerdotal,

* Graduando em Filosofia pela Faculdade João Paulo II (FAJOPA).

que, tendo a sua disposição a máquina pública, calcada num modelo escravocrata, podia ter como forma de lazer, a matemática, e consequentemente a geometria.

Todavia, seria em território grego que a geometria se libertaria tanto da agrimensura, como de aplicações astronômicas, ganhando assim um tratamento menos prático e, portanto, mais contemplativo, assim como um método - o axiomático -, que permite derivar de um número relativamente pequeno de premissas, tidas como auto-evidentes, as quais chamamos de axiomas ou postulados, uma série de conclusões, implícitas naqueles, as quais chamamos de teoremas.

Seria então a matemática puramente dedutiva? Para Poincaré, não, pois se a matemática consistisse, em uma infinidade de maneiras diferentes de dizer que A = A, não faria sentido perder nosso tempo analisando cuidadosamente os grossos volumes dos tratados de geometria, nem poderia, dessa forma, ser aplicável a nada; por ser uma imensa tautologia, que nada acrescentaria ao espírito humano. Afirma, pois, Poincaré:

> ...se a ciência do número fosse puramente analítica ou pudesse provir analiticamente de um pequeno número de juízos sintéticos, parece que um espírito bastante poderoso seria capaz de apreender, num piscar de olhos, todas as suas verdades; que digo eu! Poderíamos mesmo esperar que algum dia fosse inventada, para exprimi-las, uma linguagem bastante simples para que elas se mostrassem assim, imediatamente, a uma inteligência comum.
> Se nos recusamos a admitir essas conseqüências, temos que aceitar que o raciocínio matemático tem, nele próprio, uma espécie de virtude criadora e, conseqüentemente, que ele se distingue do silogismo (POINCARÉ, 1985, p. 22).

Portanto, é natural que a matemática, e em especial a geometria, tenha uma “virtude criadora”, que é justamente algo como que indutivo acrescentado à sequência silogística dedutiva: trata-se do “raciocínio por recorrência” (POINCARÉ, 1985, p. 22-26). Isso torna o método axiomático possível e afasta a geometria dos pleonásticos caminhos da metafísica.

A indução matemática, por depender de uma atividade do espírito, está a salvo das turbulências que cercam os raciocínios indutivos nas ciências experimentais, que, calcando-se numa suposta uniformidade do curso da natureza, ficam sujeitos a uma possível rebeldia desta, como ficou explícito na denúncia humeano à indução, nas ditas ciências naturais.

Abordaremos, na sequência, o problema do contínuo, primeiramente o contínuo físico que, de certa forma, é um degrau obrigatório, para, depois, considerarmos o contínuo matemático, assegurando, dessa forma, a coerência do espaço do geômetra. A seguir, daremos elementos para se compreender a questão da consistência, que será retomada depois de tratarmos dos pontos primordiais das geometrias não-euclidianas, de modo a estabelecer um possível critério de avaliação, seja da geometria do autor de *Os Elementos*, seja das geometrias que a esta se contrapuseram, tornando viável alguns desfechos.

O contínuo

Devemos reter nossa atenção a um dos mais importantes fatores que compõem o espaço do geômetra: o contínuo. O contínuo indica uma idéia de ininterrupção, de continuidade e, como frisa Poincaré, "de uma unidade na diversidade", ou seja, uma coleção de indivíduos estreitamente ligados. Expliquemos inicialmente e de maneira menos abstrusa, o conceito de contínuo vigente nas ciências físicas, de modo a clarear e preparar o entendimento para um mergulho mais profundo no contínuo matemático.

Citemos inicialmente a lei de Fechner, cujo autor, através de um conjunto de experiências, pôde enunciar a lei à qual empresta seu nome, que entre outras conseqüências determina o seguinte: dado um peso A de 10 Kg e um peso B de 11 Kg, estes são indiscerníveis a um homem corretamente vendado, que deve, usando apenas de seu aparelho sensório-motor, determinar quais blocos tem o mesmo peso. Todavia se entregamos o primeiro bloco a esse homem, juntamente com um bloco C de 12 Kg, este facilmente determina qual é o mais leve e qual é o mais pesado. Dessa forma temos:

$$A = B$$
$$A = C$$
$$A < C$$

Através da fórmula acima, temos uma boa definição do que é um contínuo no âmbito da física. Poderia-se argumentar que o corpo humano, ainda mais vendado, não é uma balança suficientemente precisa. Peguemos, pois, uma balança mais precisa em que o peso A tem 10 Kg e o peso B 10,01 Kg, e o C por seu turno 10,02 Kg. Como toda ferramenta de mensuração não é nunca suficientemente precisa, se ocorrer especificamente nesta balança uma margem de erro de

0,01, o mesmo resultado se repetirá, e não importa a qual recurso recorramos para aferir uma medida mais precisa, sempre alguns décimos, centésimos ou milionésimos, escaparão pelo ladrão.

Para resolver esse paradoxo, e outros que poderiam causar transtornos à concepção do espaço do geômetra, foi criado o contínuo matemático. Portanto, e tendo isso em vista, imaginemos a coleção de números naturais dispostos em seqüência, de modo que podemos intercalar entre dois números, por exemplo, entre o 0 e o 1, outro número maior que o primeiro e menor que o segundo, por exemplo, 0,5. E que possamos intercalar ainda um número entre estes, por exemplo, 0,75 e, dessa forma, intercalar ainda outros números entre 0,75 e 1, e assim indefinidamente. Os números que temos, apesar de já serem em número infinito, não constituem uma seqüência na qual haja a continuidade e o liame íntimo que possam, por exemplo, ser atribuídos a uma reta. O que temos em mãos são apenas os números comensuráveis, faltando ainda para intercalar os números incomensuráveis ou irracionais, como o $\sqrt{2}$.

Vejamos agora o seguinte raciocínio, os números comensuráveis podem ser divididos de uma infinidade de formas, sempre com a condição de que um número qualquer da primeira classe seja sempre maior que um da segunda. Se escolhermos, por exemplo, o número 2 como ponto de referência, a classe dos números maiores que 2, será obviamente maior que a classe dos menores que 2, não importando qual elemento das duas classes escolhamos.

Note-se que o número escolhido, por ser comensurável, divide de maneira unívoca, as duas classes por ele separadas. Não é difícil imaginar, que se houvéssemos escolhido o incomensurável $\sqrt{2}$, a divisão seria equívoca, de maneira que não poderíamos, devido à impossibilidade de calcular o seu valor exato, dividir as duas classes de maneira a cumprir a regra acima mencionada. Estamos no primeiro caso diante do contínuo matemático de 1ª ordem, no segundo caso nos deparamos com um contínuo de 2ª ordem.

Em se adotando o contínuo matemático de 1ª ordem, cairíamos em contradições graves ao definirmos o que são, por exemplo, reta e círculo, pois dado um quadrado com um círculo inscrito, teremos que admitir que a diagonal do quadrado não cruzaria o referido círculo, já que as coordenadas do encontro são incomensuráveis, de maneira que esse ponto é assim por dizer, um "buraco" na continuidade que seria encontrada, essa sim, no contínuo de 2ª ordem, que por ser formado pela mesma regra que preside à formação da escala dos números incomensuráveis, escaparia do mesmo problema. Diz Poincaré (1985, p.38): “essa é a origem do contínuo de segunda ordem, que é o contínuo matemático propriamente dito”.

Devemos lembrar que a escolha preferencial pelo contínuo de 2ª ordem, não é feita experimentalmente, visto que a matemática só muito raramente se reporta a esta; nem tão pouco, por ser uma verdade que extirpasse contradições de todos os tipos. Vale ressaltar que além do contínuo de 1ª ordem, que é utilizado para algumas aplicações, existe ainda o contínuo de 3ª ordem, que se utilizando deste, Hilbert e Veronese, no dizer de Poincaré: “imaginaram novas geometrias, ainda mais estranhas [que as não-euclidianas], que chamaram não-arquimedianas” (POINCARÉ, 1985, p.52). Todavia, infelizmente a investigação sobre a natureza de tal contínuo e seu respectivo espaço fogem do objetivo desse artigo. A existência desses contínuos, menos utilizados, nos forçam a concluir, com Poincaré, que a escolha feita por um sistema ou outro se dá de maneira convencional, optando-se pelo que melhor atende as demandas do geômetra.

O matemático e filósofo francês esclarece que “foi quando se quis introduzir a medida no contínuo (...) que esse contínuo tornou-se o espaço, e que nasceu a geometria” (POINCARÉ, 1985, p. 42). Para ele, o espaço geométrico euclidiano tem as seguintes características:

1) é contínuo;
2) é infinito;
3) tem três dimensões;
4) é homogêneo, quer dizer, todos os seus pontos são idênticos entre si;
5) é isótropo, isto é, todas as retas que passam por um mesmo ponto são idênticas umas às outras. (POINCARÉ,1985, p. 55-56)

O quinto axioma

Assegurada a continuidade do espaço do geômetra, falemos sobre o método axiomático, que já tivemos a oportunidade de descrever como sendo o oficio do matemático, que consiste em derivar de alguns poucos postulados ou axiomas, os teoremas que necessita. Nesse sistema, os postulados atuam como “verdades”, normalmente intuitivas, que são indemonstráveis, apoiando sobre si todo um edifício lógico-matemático que deles emana.

A axiomatização da geometria data da antiguidade helênica, quando Euclides, matemático grego, a efetuou; partindo, na estruturação de seus postulados, da visão intuitiva do mundo físico, de modo que, era natural que tal sistema parecesse tão perfeito às necessidades humanas, que não é difícil entender, por que a quebra da exclusividade de sua cosmovisão representa um dos capítulos mais dramáticos da história da geometria, quando "Poincaré atreveu-se a perguntar qual a geometria verdadeira" (EVES, 2004, p. 572).

Um sistema de postulados, lembrando que o uso que aqui fazemos dessa palavra é exatamente o mesmo que axioma, torna-se tão mais elegante e digno de admiração quanto mais ele for consistente, suficiente e independente. A consistência se refere ao atributo do conjunto axiomático que de seus postulados não se pode derivar dois teoremas contraditórios. Por seu turno, um conjunto de axiomas é suficiente se, e somente se, toda a teoria puder ser desenvolvida sem a necessidade de mais axiomas. Já a independência se remete ao fato de não se poder demonstrar um axioma através de outros axiomas do sistema.

Seria justamente acreditando que um dos postulados euclidianos, o quinto, que por ser pouco evidente e de redação bastante controversa, poderia não ser independente dos demais, que desde a antiguidade, vários matemáticos se dedicaram a tentar provar a dependência deste em relação aos outros quatro, suspeitando de um deslize do mestre e reivindicando para tal enunciado, o caráter de teorema. Diz o quinto axioma euclidiano:

> ...se duas retas, em um mesmo plano, são cortadas por uma outra reta e se a soma dos ângulos internos de um lado é menor do que dois retos, então as retas se encontram, se prolongadas suficientemente, do lado em que a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos retos (FEITOSA; LOCCI, 1996, p. 65).

E foi tentando, em vão, provar a dependência de tal postulado, em relação aos demais, que tal axioma foi alvo de várias reelaborações, produzindo um importante subproduto creditado ao matemático inglês John Playfair, que ofereceu a seguinte alternativa ao tradicional postulado: "sejam dados, em um plano, uma reta AB e um ponto P que não está no plano, então existe uma e só uma paralela a AB passando por P" (FEITOSA; LOCCI, 1996, p. 66). Tal axioma é chamado de "axioma das paralelas" ou "axioma de Playfair", sendo a formulação mais ilustre do axioma que Euclides criara na antiguidade, simplificando muito nosso trabalho. Será o ponto do qual partirão nossos raciocínios.

As geometrias não-euclidianas

Com a dependência do quinto axioma descartada, tentou-se subverter o postulado de Playfair, cabendo a Nicolai Lobatchevski e a Janos Bolyai, trabalhando quase que simultaneamente e de maneira independente, descobrir o que um deles chamaria de “geometria imaginária”, ou como passou para posteridade, “geometria hiperbólica”, trocando o modelo de Euclides por um modelo baseado na pseudo-esfera, com uma curvatura, negativa por definição, tendo por axioma central, a afirmação de que, por um por um ponto fora do plano, pode-se fazer passar várias paralelas a uma reta dada; o que nos leva ao teorema que constata que em tal espaço, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos, rompendo com a geometria euclidiana, na qual em um triângulo qualquer, os ângulos internos somam 180 graus. Estava instaurado o caos na concepção de espaço.

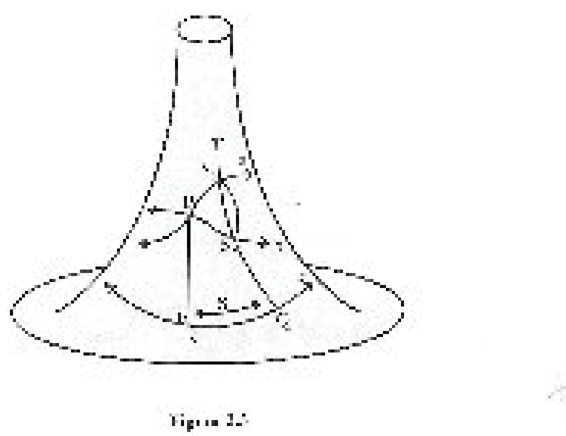

Figura 0.1 – (COUTINHO, 2001, p. 41)

Apesar das severas críticas recebidas, muitas delas importantes como a de Gauss, a idéia era perfeitamente plausível e foi sustentada com convicção por Lobatchevski, e apesar da reticência de Bolyai, conseguiram angariar alguns simpatizantes, podendo fazer frente às opiniões contrárias. E qual não foi a surpresa quando Georg Riemann, apresentou uma segunda geometria não-euclidiana, que se baseando no modelo da esfera, com curvatura positiva, constituiu a geometria elíptica que postulava que por um ponto fora do plano não se pode traçar nenhuma paralela a uma reta dada, que entre outras conseqüências faz a soma dos ângulos internos do triângulo, maior que dois ângulos retos, além do fato de permitir que, no espaço finito de uma esfera, movimentos ilimitados ao seu redor sejam possíveis.

Outro fator de ruptura, na geometria de Riemann, foi outra alteração feita no corpo de axiomas de Euclides. Enquanto entre dois pontos dados no espaço euclidiano, pode-se traçar apenas uma reta, em pontos diametralmente opostos da esfera, pode-se passar uma infinidade de retas, que na verdade, devido à deformação de sua curvatura, mais se assemelhariam a círculos. Já em pontos não diametralmente opostos vale a regra de que entre dois pontos podemos traçar apenas uma reta. Existe uma inferência implícita aqui. Ora, se digo que a reta euclidiana pode ser entendida como um círculo na geometria bidimensional de Riemann, é por que existe uma linguagem que pode traduzir sentenças de um dado sistema para outro, de forma que podemos comparar seus conceitos sem cair em contradição como mostrou Beltrami, e essa propriedade vale também para a geometria hiperbólica bidimensional de Bolyai-Lobatchevski, e como afirma Poincaré: "seria fácil estender o raciocínio de Beltrami às geometrias tridimensionais" (POINCARÉ, 1985, p.48).

Isso significa dizer que se a geometria euclidiana for consistente, também o será todo o tipo de geometria que possa ser escrita *mutatis mutandis* em sua linguagem. Deve-se dizer aqui algo sobre a consistência, partindo da visão que o matemático, visando comprovar a consistência de um conjunto de axiomas, procura invariavelmente: reduzir esse sistema de enunciados num modelo que dê conta de representá-lo. Sejam as seguintes classes K e L e o seguinte grupo de axiomas:

1- quaisquer dois membros de K estão contidos em apenas um membro de L
2- nenhum membro de K está contido em mais do que dois membros de L
3- os membros de K não estão todos contidos em um único membro de L
4- quaisquer dois membros de L contém apenas um membro de K
5- nenhum membro de L contém mais do que dois membros de K

(NAGEL, NEWMAN, 2009, p. 23)

O problema da consistência estará resolvido se pudermos transformá-lo em um modelo como o que se segue:

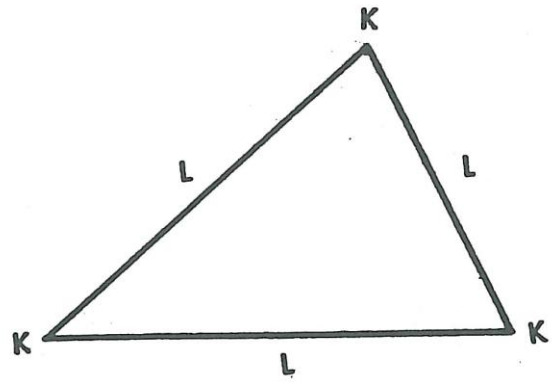

Fig. 1

figura 1.1 – (NAGEL, NEWMAN, 2009, p. 24)

Como vemos, o desenho acima, que garante a consistência do grupo de enunciados acima, cumpre todas exigências entre as classes consideradas, fornecendo um formato gráfico ao nosso entendimento. Contudo, nem sempre é fácil estabelecer a consistência de um grupo de axiomas. Às vezes, como é o caso das geometrias não-euclidianas, é preciso recorrer à consistência de outra classe axiomática, de maneira que, traduzindo, como mencionamos antes, os axiomas dessas geometrias para uma linguagem que se acomode ao sistema de enunciados euclidianos, tenta-se através da consistência aparente da geometria de Euclides, afirmar a consistência das geometrias que com esta romperam.

Todavia, antes de solucionado, o problema foi apenas deslocado, pois se, e somente se, a geometria euclidiana tradicional for consistente, poderemos, então, afirmar a consistência das geometrias revolucionárias. Hilbert propôs uma possível solução para o problema, baseando-se na geometria de coordenadas cartesianas, transformando os tradicionais axiomas do geômetra grego em verdades algébricas. Entretanto, apesar do engenho dessa conjectura, Hilbert termina por empurrar o problema da consistência da geometria euclidiana, recorrendo-se à suposta consistência da álgebra.

Além disso, outro fator que dificulta em muito o trabalho do matemático é justamente o fato que, ao contrário do exemplo das classes K e L, que, por conter um número de axiomas reduzido, presta-se facilmente a uma inspeção real, que embora possa ser exaustiva, é finita, ao passo que os grandes sistemas, como é o caso das geometrias não-euclidianas e da própria geometria de Euclides,contém infinitos enunciados que podem ser derivados de seus postulados, de modo que a possibilidade de uma inspeção real, feita *in concreto*, no modelo fica totalmente comprometida.

Considerações finais

Talvez o maior argumento em favor de uma geometria não seja nem de natureza lógica, mas antes da sua aplicabilidade teórica bem sucedida. A geometria euclidiana, que, por ser mais intuitiva e por ser mais congruente com o conceito de espaço formulado a partir da nossa experiência, a ponto de fundamentar nossas ações no mundo fático, vai continuar tendo o seu lugar de destaque, e mais que isso: muito dificilmente vai perder seu aspecto privilegiado.

Tendo equiparada sua consistência à geometria de Euclides, as geometrias que surgiram a partir dos trabalhos geniais de Bolyai, Lobatchevski e Riemann, não tardaram em encontrar utilidade em campos menos intuitivos da ciência, como na teoria da relatividade, que se vale da geometria hiperbólica, e até em contrapartida, em campos bastante práticos como é o caso do uso da geometria de Riemann na navegação.

Se estamos diante de geometrias tão diferentes, que além de poderem afirmar mutuamente sua consistência, têm o seu uso consagrado em certas áreas, teremos que concluir que o que deve orientar na escolha de uma ou de outra é a capacidade de resolver problemas teóricos e técnicos, evitando assim uma escolha marcadamente arbitrária, que se basearia mais em gostos ou paixões do cientista, do que no seu uso efetivo.

Por outro lado, o advento de geometrias não intuitivas acaba por assinalar uma epopéia do homem em busca da verdade que, cada vez mais, parece-lhe estar impossibilitada de ser encontrada. Por mais inseguros que estejamos, nossa razão nos impele a questionar. As palavras do pai de Bolyai soam desafiadoras ao gênero humano em sua cotidiana aventura: “Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema, tanto isso quanto as paixões sensuais, porque isso também pode tomar todo o seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida” (COUTINHO, 2001, p. 2). E assim seguimos.

Referências

COUTINHO, Lázaro. *Convite às geometrias não-euclidianas*, Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: ed. Unicamp, 2004.

FEITOSA, Hércules de Araújo; LOCCI, Walter. O Fazer Matemático. *Mimesis.* 23, 3, 1996.

NAGEL, Ernest; NEWMAN James R. *A Prova de Godel.* São Paulo: Perspectiva, 2009.

POINCARÉ, Jules Henri. *A Ciência e a hipótese*. Brasília, ed. Universidade de Brasília, 1985.