

NOÇÕES DE MODELOS EM LÓGICAS UNIVERSAIS

NOTIONS OF MODELS IN UNIVERSAL LOGICS

Hércules de Araújo Feitosa¹
Angela Pereira Rodrigues Moreira²
Itala Maria Loffredo D'Ottaviano³

Resumo: Neste artigo trabalhamos com noções gerais de lógica num ambiente abstrato. Fazemos uso de conceitos de traduções entre lógicas para relacionar estruturas sintática e semântica, atrelando, assim, os conceitos de traduções entre lógicas aos conceitos de correção e completude de uma lógica. Traduções são também vinculadas à noção de função contínua. Por fim, por meio de noções de modelos lógicos, obtemos lógicas abstratas.

Palavras-chave: Tradução entre lógicas. Modelos. Lógicas abstratas. Lógica universal.

Abstract: In this article we work with general notions of logic in an abstract environment. We use concepts of translations between logics to relate syntactic and semantic structures, thus, connecting the concepts of translation between logics and the concepts of soundness and completeness for a logic. Translations are also binding with the notion of continuous function. Finally, by means of logical models, we obtain some general notions of abstract logics.

Keywords: Translation between logics. Models. Abstract logics. Universal logic.

Introdução

Nas investigações contemporâneas sobre lógica(s), alguns aspectos são geralmente aceitos: há uma multiplicidade de sistemas lógicos, cada sistema é determinado sobre uma linguagem artificial específica, existem dispositivos que caracterizam o aspecto dedutivo daquele sistema lógico, o componente dedutivo carrega consigo algum compromisso com o formal, que está vinculado à forma ou a um esquema a ser preservado.

Desenvolvemos, aqui, algumas noções bastante gerais de lógica em um contexto que ainda não exige uma linguagem formal com conectivos ou operadores lógicos sobre aquela linguagem. Pretendemos desenvolver uma análise de aspectos lógicos que não

¹ Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus de Bauru e do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da mesma instituição, Campus de Marília. E-mail: haf@fc.unesp.br

² Professora Substituta do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus de Bauru. Doutora em Filosofia pela Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. E-mail: angela.p.rodrigues@bol.com.br

³ Professora Titular Colaborador em Lógica e Fundamentos da Matemática do Departamento de Filosofia da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP. E-mail: itala@cle.unicamp.br

exijam esses usuais aspectos e nos ateremos à noção da dedutibilidade. Certamente os demais componentes usuais dos sistemas lógicos são relevantes, porém procuraremos fazer um caminho do geral, do muito geral, para o particular, e esperamos, com isto, ter clareza de alguns caminhos e eventualmente descortinarmos aspectos não revelados em outras empreitadas.

A tradição de investigar lógicas em seus aspectos mais gerais e universais está dentro do contexto da Filosofia da Lógica e tem recebido diversos nomes, como lógicas, sistemas dedutivos, lógicas abstratas e lógicas universais, tal como sugere Beziau (2007). Este autor espelha a expressão lógica universal no termo álgebra universal, com o entendimento de que olhamos para as muitas apresentações gerais ou abstratas como um empreendimento para a sua compreensão no contexto da Filosofia da Lógica.

No desenvolvimento do texto, resgatamos aspectos bem desenvolvidos desta tradição e incluímos alguns aspectos originados nas nossas investigações, bem como explicações conceituais que não estão necessariamente presentes nos muitos tratados indicados na bibliografia.

1 Definição de lógica de Tarski

A definição seguinte destaca um aspecto essencial da concepção de lógica, a relação de consequência. Tarski (1983), o proponente desta definição, julgou que ela contemplaria algumas das noções essenciais de lógica, a relação de consequência lógica. Mais detalhes sobre este desenvolvimento abstrato de lógica podem ser vistos em (de SOUZA, 2001 e 2002), (D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2007), (MARTIN; POLLARD, 1996) e (WÓJCICKI, 1988).

A seguir, o conjunto E será o domínio das unidades lógicas, que podem ser proposições, sentenças, juízos, enunciados ou quaisquer outros portadores lógicos de verdade. Nesta empreitada abstrata, isto não se faz fundamental.

Dado um conjunto E , um *operador de consequência* sobre E é uma função $C: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ tal que, para todos $A, B \subseteq E$:

- (i) $A \subseteq C(A)$ [autodedutibilidade]
- (ii) $A \subseteq B \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$ [monotonicidade]
- (iii) $C(C(A)) \subseteq C(A)$ [idempotência].

O conjunto $C(A)$ deve ser entendido como as consequências do conjunto A ou a coleção dos itens que podem ser deduzidos ou derivados de A .

Dos itens (i) e (ii), observamos que para todo operador de consequência C vale a igualdade $C(C(A)) = C(A)$.

Uma *lógica abstrata* é um par (E, C) , em que E é um conjunto qualquer e C é um operador de consequência sobre E .

Em geral, no ambiente lógico, a relação de consequência é aplicada passo a passo, sempre sobre um conjunto finito de dados, usualmente chamadas de *premissas*. A cada passo obtemos uma *conclusão* e podemos continuar mais e mais nesse procedimento, com um passo de cada vez. A definição seguinte caracteriza este aspecto para o operador acima definido.

O operador de consequência C sobre E é *finitário* quando, para todo $A \subseteq E$, vale o seguinte:

$$C(A) = \cup \{C(A_f) : A_f \text{ é subconjunto finito de } A\}.$$

O conjunto A é *fechado* em (E, C) se $C(A) = A$, e é *aberto* se o seu complementar, A^C , é fechado.

Dada uma lógica (E, C) , considera-se a seguinte relação definida sobre E :

$$X \sim Y \Leftrightarrow C(X) = C(Y).$$

Proposição 1.1: A relação \sim é uma equivalência sobre E .

Demonstração: (E₁) Desde que $C(X) = C(X)$, então $X \sim X$.

(E₂) Se $X \sim Y$, então $C(X) = C(Y)$ e, daí, $Y \sim X$.

(E₃) Se $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, então $C(X) = C(Y)$ e $C(Y) = C(Z)$, donde segue que $C(X) = C(Z)$ e, portanto, $X \sim Z$. ■

Se $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$ são conjuntos unitários, então $\{x\} \sim \{y\} \Leftrightarrow C(X) = C(Y)$

e, desse modo, $x \in \mathbf{C}(y)$ e $y \in \mathbf{C}(x)$. É usual o abuso desta notação e escrever-se apenas $x \sim y \Leftrightarrow \mathbf{C}(x) = \mathbf{C}(y)$.

A relação de consequência no contexto lógico tem duas variantes essenciais: a sintática e a semântica. Passaremos a discuti-las neste contexto bastante geral no qual optamos tratar os conceitos lógicos.

Na variante sintática, usualmente, tomamos uma linguagem formal L , sobre a qual definimos o conjunto das fórmulas (ou sentenças bem formadas) $\text{For}(L)$. Então um operador de consequência sobre a linguagem L deve ser visto como um operador de consequência sobre o conjunto $\text{For}(L)$.

Precisa-se aí determinar exatamente como é esta relação de consequência. Alguns métodos bastante conhecidos são empregados. Muito comuns são os sistemas axiomáticos, motivados pelo desenvolvimento axiomático da geometria euclidiana, mas também os sistemas de dedução natural e cálculo de seqüentes, introduzidos em 1935 por Gerhard Gentzen (1969), e os sistemas de Tablôs (Smullyan, 1968). Estes sistemas dedutivos são evidenciados por regras e têm, em geral, como uma característica essencial o fato de serem algorítmicos.

Usualmente escrevemos que $A \vdash x$ para indicar que sintaticamente $x \in \mathbf{C}(A)$. Ainda neste contexto, os conjuntos fechados são denominados de *teorias* e cada elemento de uma teoria é chamado de *teorema* da teoria.

Esta análise sobre as lógicas pode ser refinada ao considerarmos propriedades específicas de determinadas linguagens. Contudo, dado o caráter universal da nossa abordagem, não especificaremos o conjunto $\text{For}(L)$ e continuaremos com um conjunto genérico E .

A variante semântica trata da dedução sobre estruturas matemáticas e, de modo geral, não tem a característica algorítmica da versão sintática. Na estrutura matemática modelo são distinguidos alguns elementos para darem conta da verdade ou do válido e a relação se aplica se em toda situação em que as premissas são válidas (verdadeiras), também a conclusão é válida (verdadeira).

Da mesma forma que são muitos os métodos dedutivos, também são diversos os ambientes semânticos para as muitas lógicas. Nem todos são completamente excludentes, mas destacamos as valorações, as matrizes lógicas, os modelos algébricos,

modelos no estilo Kripke, no estilo topológico, de grafos, entre outros.

Na seção seguinte, tentaremos explicitar aspectos bastante gerais de alguns destes tipos de modelos.

2 Lógicas abstratas no contexto semântico

No ambiente semântico também exigimos as relações de consequência. Para interpretarmos ou atribuirmos valor aos elementos sintáticos, tomamos certas estruturas matemáticas e uma *função de interpretação*, também chamadas em muitos casos de *valoração* ou *atribuição*, que leva cada elemento do contexto sintático, num elemento do contexto semântico e, posteriormente, buscamos relacioná-los como veremos adiante.

Inicialmente, consideramos alguns aspectos dos ambientes semânticos associados com as lógicas. Estes ambientes semânticos ou modelos têm algumas classificações bastante frequentes em formas de: valorações, matrizes lógicas, álgebras, modelos de Kripke, entre outros.

Mais à frente, veremos como a concepção abstrata destes tipos de modelos podem gerar aspectos particulares de lógicas abstratas.

A seguir descrevemos uma concepção bastante geral dos modelos semânticos associados a uma lógica abstrata qualquer (FEITOSA, 1997).

Dada uma lógica (E, \mathcal{C}) , buscamos uma classe de estruturas semânticas, que são casos específicos de estruturas matemáticas adequadas, em sentido a ser precisado.

Para cada lógica, deve estar associada um conjunto de estruturas, indicada por $\text{Est}(E)$, o mesmo domínio, para o qual esteja definida uma relação de satisfação $\models \subseteq \text{Est}(E) \times E$, com a seguinte intenção: $(\mathcal{C}, x) \in \models$ ou, como usual, $\mathcal{C} \models x$, se a estrutura \mathcal{C} satisfaz o elemento x ; e $\mathcal{C} \not\models x$, se a estrutura \mathcal{C} não satisfaz o elemento x .

Assim, existe uma função de interpretação de E em $\text{Est}(E)$ que atribui significado às expressões sintáticas de E em aspectos das estruturas matemáticas de $\text{Est}(E)$. O conjunto $\text{Est}(E)$ pode ser, mas não é necessário, muito diverso do conjunto E .

Se $A \subseteq E$, então a *classe dos modelos* de A é definida por $\text{Mod}(A) =_{\text{df}} \{\mathcal{C} \in$

$\text{Est}(E)$: para todo $x \in A$, $\mathfrak{C} \models x$. Por outro lado, dado $M \subseteq \text{Est}(E)$, a *teoria de M* é definida como $\text{Th}(M) =_{\text{df}} \{y \in E : \text{para todo } \mathfrak{C} \in M, \mathfrak{C} \models y\}$.

Segue destas definições que $A \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(A))$ e que $M \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(M))$.

Se $M = \{\mathfrak{C}\}$, então $\text{Th}(M) = \text{Th}(\mathfrak{C}) = \{y \in E : \mathfrak{C} \models y\}$, é o conjunto dos elementos válidos segundo o modelo \mathfrak{C} .

Proposição 2.1: Para $A \subseteq B \subseteq E$, tem-se que $\text{Mod}(B) \subseteq \text{Mod}(A)$.

Demonstração: Se $\mathfrak{C} \in \text{Mod}(B)$, então $\mathfrak{C} \models y$, para todo $y \in B$. Como $A \subseteq B$, em particular, $\mathfrak{C} \models x$, para todo $x \in A$. Logo, $\mathfrak{C} \in \text{Mod}(A)$. ■

Proposição 2.2: Para $M \subseteq N \subseteq \text{Est}(E)$, segue que $\text{Th}(N) \subseteq \text{Th}(M)$.

Demonstração: Se $x \in \text{Th}(N)$, então, para toda $\mathfrak{C} \in N$, vale que $\mathfrak{C} \models x$. Como $M \subseteq N$, então, para todo $\mathfrak{C} \in M$, $\mathfrak{C} \models x$. Logo, $x \in \text{Th}(M)$. ■

Dado $A \subseteq E$, as consequências de A , módulo a classe de estruturas $\text{Est}(E)$, é definida por:

$$C_{\models}(A) =_{\text{df}} \text{Th}(\text{Mod}(A)).$$

Proposição 2.3: A função C_{\models} é um operador de consequência sobre E .

Demonstração: (i) $A \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(A)) = C_{\models}(A)$.

(ii) Se $A \subseteq B$, então $\text{Mod}(B) \subseteq \text{Mod}(A)$ e, portanto, $\text{Th}(\text{Mod}(A)) \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(B))$, ou seja, $C_{\models}(A) \subseteq C_{\models}(B)$.

(iii) Pela observação acima, $M \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(M))$. Agora, se $M = \text{Mod}(A)$, então $\text{Mod}(A) \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(\text{Mod}(A)))$. Pela Proposição 2.2, $\text{Th}(\text{Mod}(\text{Th}(\text{Mod}(A)))) \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(A))$, ou seja, $C_{\models}(C_{\models}(A)) \subseteq C_{\models}(A)$. ■

Deste modo, o conjunto $\text{Th}(\text{Mod}(A))$ é fechado em (E, C_{\models}) . Cada tal conjunto é

uma teoria na lógica $(E, C_{=})$.

Se (E, C) é uma lógica abstrata e $A \cup \{x\} \subseteq E$, então a expressão $A \models x$ denota que todo modelo de A é também modelo de x . Assim, $A \models x$ é outra forma de indicar que $x \in C_{=}(A)$. Além disso, $A \models x$ é equivalente a $C_{=}(\{x\}) \subseteq C_{=}(A)$.

Consideremos que dada uma lógica (E, C) existe uma classe de estruturas $Est(E)$ a qual está associada uma outra lógica abstrata como acima, denotada por $(E, C_{=})$.

O elemento $x \in E$ é um *teorema* se $x \in C(\emptyset)$ e x é *válido*, o que é denotado por $\models x$, se $x \in C_{=}(\emptyset)$. A lógica (E, C) é *correta* segundo $(E, C_{=})$, se $C(\emptyset) \subseteq C_{=}(\emptyset)$, isto é, todo teorema de (E, C) é válido em $(E, C_{=})$; ela é *completa* se $C_{=}(\emptyset) \subseteq C(\emptyset)$, isto é, todo membro válido em $(E, C_{=})$ é um teorema de (E, C) ; ela é *adequada* se é correta e completa, ou seja, se $C(\emptyset) = C_{=}(\emptyset)$. A lógica (E, C) é *fortemente adequada* segundo $(E, C_{=})$ se, para todo $A \subseteq E$, tem-se $C(A) = C_{=}(A)$.

Os resultados seguintes não estão nos textos da bibliografia, mas são adaptações gerais e simples para lógicas universais.

Proposição 2.4: $Mod(A) = Mod(C_{=}(A))$.

Demonstração: Desde que $A \subseteq C_{=}(A)$, pela Proposição 2.1, $Mod(C_{=}(A)) \subseteq Mod(A)$. Agora, suponhamos que $Mod(C_{=}(A)) \neq Mod(A)$. Então existe $\mathfrak{C} \in Est(E)$, tal que $\mathfrak{C} \models A$, mas $\mathfrak{C} \not\models C_{=}(A)$. Isto contradiz a definição de $C_{=}(A)$. ■

Em particular, $Mod(C_{=}(\emptyset)) = Mod(\emptyset) = Est(E)$. Os teoremas da lógica (E, C) são válidos em todas as estruturas de $Est(E)$.

Proposição 2.5: $C_{=}(A) \subseteq C_{=}(B) \Leftrightarrow Mod(B) \subseteq Mod(A)$.

Demonstração: Pelas Proposições 2.1 e 2.4, temos $C_{=}(A) \subseteq C_{=}(B) \Leftrightarrow Mod(C_{=}(B)) \subseteq Mod(C_{=}(A)) \Leftrightarrow Mod(B) \subseteq Mod(A)$. ■

Corolário 2.6: $C_{\models}(A) = C_{\models}(B) \Leftrightarrow \text{Mod}(B) = \text{Mod}(A)$.

Proposição 2.7: $\text{Mod}(A) \cup \text{Mod}(B) \subseteq \text{Mod}(A \cap B)$.

Demonstração: Como $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$, então $\text{Mod}(A) \subseteq \text{Mod}(A \cap B)$ e $\text{Mod}(B) \subseteq \text{Mod}(A \cap B)$. Logo, $\text{Mod}(A) \cup \text{Mod}(B) \subseteq \text{Mod}(A \cap B)$. ■

Proposição 2.8: $\text{Mod}(A \cup B) \subseteq \text{Mod}(A) \cap \text{Mod}(B)$.

Demonstração: Como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, então $\text{Mod}(A \cup B) \subseteq \text{Mod}(A)$ e $\text{Mod}(A \cup B) \subseteq \text{Mod}(B)$. Logo, $\text{Mod}(A \cup B) \subseteq \text{Mod}(A) \cap \text{Mod}(B)$. ■

Desde que $\text{Mod}(A) \cap \text{Mod}(B) \subseteq \text{Mod}(A) \cup \text{Mod}(B)$, então $\text{Mod}(A) \cap \text{Mod}(B) \subseteq \text{Mod}(A \cap B)$ e $\text{Mod}(A \cup B) \subseteq \text{Mod}(A) \cup \text{Mod}(B)$.

Proposição 2.9: (i) $\models x \Rightarrow A \models x$;

(ii) $x \in A \Rightarrow A \models x$;

(iii) $A \subseteq B$ e $A \models x \Rightarrow B \models x$;

(iv) $A \models x$ e $\{x\} \models y \Rightarrow A \models y$;

(v) $A \models x$ e $B \cup \{x\} \models y \Rightarrow A \cup B \models y$.

Demonstração: Imediato do fato $A \models x \Leftrightarrow \text{Mod}(A) \subseteq \text{Mod}(x)$. ■

Todos estes resultados não dependem de particulares operadores lógicos de cada lógica, mas fundamentalmente da metateoria conjuntista subjacente a estas teorias.

Esta consequência semântica embora aponte para uma lógica (E, C_{\models}) , depende fundamentalmente dos modelos que estão em $\text{Est}(E)$. Nos próximos tópicos, elucidamos um pouco mais sobre este aspecto e caminhamos para olhar para alguns casos de semânticas e tratá-las neste contexto universal.

Interessa-nos, agora, estabelecer vínculos entre estruturas sintáticas e semânticas. Como temos duas lógicas abstratas, usualmente distintas, buscaremos

relacioná-las. O conceito, também abstrato, de traduções entre lógicas nos servirá de esteio.

3 Traduções entre lógicas

Como usualmente as lógicas são constituídas sobre linguagens e procuramos comparar uma lógica com outra, então fazemos isto através do conceito de função e damos a esta função o nome de tradução entre lógicas. A seguir apresentamos alguns desenvolvimentos sobre as traduções conforme (Feitosa, D'Ottaviano, 2001) e (D'Ottaviano, Feitosa, 2007).

Uma *tradução* da lógica (E_1, C_1) na lógica (E_2, C_2) é uma função $t: E_1 \rightarrow E_2$ tal que, para todo subconjunto $A \cup \{x\}$ de E_1 , vale:

$$x \in C_1(A) \Rightarrow t(x) \in C_2(t(A)).$$

Quando pensamos nos usuais sistemas lógicos, uma tradução é uma função entre os conjuntos de fórmulas dos dois sistemas que preserva derivabilidade:

$$A \vdash x \Rightarrow t(A) \vdash t(x).$$

E se $A = \emptyset$, então $t(\emptyset) = \emptyset$, e cada tradução preserva teoremas:

$$\vdash x \Rightarrow \vdash t(x).$$

A seguir, indicaremos o conjunto imagem de A pela função t por $t(A) = \{t(x) : x \in A\}$.

As demonstrações dos resultados seguintes que não estão inclusas, podem ser vistas em (Feitosa, D'Ottaviano, 2001).

Proposição 3.1: Uma função $t: E_1 \rightarrow E_2$ é uma tradução se, e somente se, $t(C_1(A)) \subseteq C_2(t(A))$, para cada $A \subseteq E_1$. ■

Proposição 3.2: A composição de duas traduções é uma tradução. A função identidade de uma lógica nela mesma é uma tradução. A composição de traduções é associativa. A função identidade é um elemento neutro para a composição de traduções. ■

Proposição 3.3: Sejam (E_1, C_1) e (E_2, C_2) duas lógicas e $t: E_1 \rightarrow E_2$ uma função. Então t é uma tradução se, e somente se, para todo $B \subseteq E_2$, tem-se $C_1(t^{-1}(B)) \subseteq t^{-1}(C_2(B))$.

■

Teorema 3.4: Sejam (E_1, C_1) e (E_2, C_2) duas lógicas e $t: E_1 \rightarrow E_2$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) t é uma tradução;
- (ii) a imagem inversa de um conjunto fechado é um conjunto fechado;
- (iii) a imagem inversa de um conjunto aberto é um conjunto aberto.

■

Uma função f é *fechada* se a imagem de todo conjunto fechado segundo f é fechado.

Um *L-homeomorfismo* entre as lógicas (E_1, C_1) e (E_2, C_2) é uma função bijetiva $t: E_1 \rightarrow E_2$, tal que t e t^{-1} são traduções. Neste caso, as lógicas (E_1, C_1) e (E_2, C_2) são *L-homeomorfas*.

Proposição 3.5: Se (E_1, C_1) e (E_2, C_2) são lógicas e a função $t: E_1 \rightarrow E_2$ é bijetiva, então t é um L-homeomorfismo se, e somente se, $t(C_1(A)) = C_2(t(A))$, para todo $A \subseteq E_1$.

■

O conceito de tradução conservativa refina o de tradução e estará mais próximo das aplicações que daremos para as traduções nos próximos passos.

Uma *tradução conservativa* da lógica (E_1, C_1) na lógica (E_2, C_2) é uma função $t: E_1 \rightarrow E_2$ tal que, para todo subconjunto $A \cup \{x\}$ de E_1 , vale:

$$x \in C_1(A) \Leftrightarrow t(x) \in C_2(t(A)).$$

Uma *aplicação conservativa* é uma função que preserva e conserva teoremas, isto é, é uma função $t: E_1 \rightarrow E_2$ tal que, para todo $x \in E_1$:

$$x \in C_1(\emptyset) \Leftrightarrow t(x) \in C_2(\emptyset).$$

Cada tradução conservativa é aplicação conservativa e tradução, mas não vale a recíproca.

Como cada L-homeomorfismo é uma tradução bijetiva para a qual a inversa também é tradução, então todo L-homeomorfismo é uma tradução conservativa, porém nem toda tradução conservativa é um L-homeomorfismo.

Teorema 3.6: Uma tradução de (E_1, C_1) em (E_2, C_2) é conservativa se, e somente se, $t^{-1}(C_2(t(A))) \subseteq C_1(A)$, para todo $A \subseteq E_1$. ■

Proposição 3.7: A composição de traduções conservativas é uma tradução conservativa. A identidade entre lógicas é uma tradução conservativa. A composição de traduções conservativas é associativa. A identidade é uma unidade para a composição. ■

O teorema seguinte introduz uma outra condição, necessária e suficiente, para que uma função $t: (E_1, C_1) \rightarrow (E_2, C_2)$ seja uma tradução conservativa. Esta condição depende de que os operadores de consequência de (E_1, C_1) e (E_2, C_2) sejam finitários.

Teorema 3.8: Seja $t: (E_1, C_1) \rightarrow (E_2, C_2)$ uma função entre lógicas com operadores de consequência finitários. Então t é uma tradução conservativa se, e somente se, para todo $A \cup \{x\} \subseteq E_1$ finito, tem-se que $x \in C_1(A) \Leftrightarrow t(x) \in C_2(t(A))$.

Demonstração: (\Rightarrow) Se t é uma tradução conservativa então, para todo $A \cup \{x\} \subseteq E_1$, $x \in C_1(A) \Rightarrow t(x) \in C_2(t(A))$, em particular, vale para A finito. (\Leftarrow) Desde que os operadores de consequência C_1 e C_2 são finitários e para um operador finitário C , $C(B) = \cup\{C(B_f) : B_f \text{ é finito e } B_f \subseteq B\}$, então o resultado segue imediatamente.

■

Se (E_1, C_1) e (E_2, C_2) são lógicas que admitem a completude forte, então o resultado anterior corresponde à compacidade dos sistemas.

Proposição 3.9: Se existe uma tradução conservativa e recursiva de uma lógica (E_1, C_1) em uma lógica decidível (E_2, C_2) , então a primeira também é decidível. ■

Proposição 3.10: Seja $t: (E_1, C_1) \rightarrow (E_2, C_2)$ uma aplicação conservativa. Se (E_1, C_1) é

não trivial, então (E_2, C_2) é não trivial. ■

Muito frequentemente, ser não trivial é o mesmo que ser consistente, então a aplicação conservativa t preserva consistência. Porém há casos de exceção.

Proposição 3.11: Seja $t: (E_1, C_1) \rightarrow (E_2, C_2)$ uma aplicação conservativa tal que $\text{Im}(t) - C_2(\emptyset) \neq \emptyset$. Se (E_2, C_2) é não trivial, então (E_1, C_1) é não trivial. ■

Corolário 3.12: Seja $t: (E_1, C_1) \rightarrow (E_2, C_2)$ uma aplicação conservativa e sobrejetiva. Se (E_2, C_2) é não trivial, então (E_1, C_1) é não trivial.

■

Carnielli, Coniglio e D'Ottaviano (2007) introduzem a definição de tradução contextual entre lógicas, em que o conceito de lógica é dado por uma linguagem proposicional formal específica, como uma função que deve preservar certas propriedades.

A seguir, de modo original, colocamos esta definição de tradução contextual no ambiente conjuntista apenas, para termos como comparar este conceito com aqueles até aqui introduzidos.

Uma *tradução contextual abstrata* da lógica (E_1, C_1) na lógica (E_2, C_2) é uma função $t: E_1 \rightarrow E_2$ tal que, para todo subconjunto $A_i \cup \{x_i\}$ de E_1 , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, vale:

$$\{x_1 \in C_1(A_1), \dots, x_{n-1} \in C_1(A_{n-1}) \Rightarrow x_n \in C_1(A_n)\} \Rightarrow \\ \{t(x_1) \in C_2(t(A_1)), \dots, t(x_{n-1}) \in C_2(t(A_{n-1})) \Rightarrow t(x_n) \in C_2(t(A_n))\}.$$

Proposição 3.13: Toda tradução conservativa é uma tradução contextual abstrata.

Demonstração: Suponhamos que $t: E_1 \rightarrow E_2$ é uma tradução conservativa e para todo subconjunto $A_i \cup \{x_i\}$ de E_1 , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_1 \in C_1(A_1), \dots, x_{n-1} \in C_1(A_{n-1}) \Rightarrow x_n \in C_1(A_n)$ e $t(x_1) \in C_2(t(A_1)), \dots, t(x_{n-1}) \in C_2(t(A_{n-1}))$, como t é uma tradução conservativa, $x_1 \in C_1(A_1), \dots, x_{n-1} \in C_1(A_{n-1})$, daí $x_n \in C_1(A_n)$, e de t ser uma tradução, $t(x_n) \in C_2(t(A_n))$. ■

Assim, cada tradução contextual abstrata é uma tradução e toda tradução conservativa é uma tradução contextual. Porém, nem toda tradução contextual abstrata é uma tradução conservativa, por exemplo, a função identidade do cálculo proposicional intuicionista no cálculo proposicional clássico é uma tradução contextual abstrata, mas não é uma tradução conservativa.

Tradução contextual conservativa de (E_1, C_1) em (E_2, C_2) é uma função $t: E_1 \rightarrow E_2$ tal que, para todo subconjunto $A_i \cup \{x_i\}$ de E_1 , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, vale:

$$\{x_1 \in C_1(A_1), \dots, x_{n-1} \in C_1(A_{n-1}) \Rightarrow x_n \in C_1(A_n)\} \Leftrightarrow \\ \{t(x_1) \in C_2(t(A_1)), \dots, t(x_{n-1}) \in C_2(t(A_{n-1})) \Rightarrow t(x_n) \in C_2(t(A_n))\}.$$

A definição acima nos pareceu inicialmente interessante e talvez trouxesse algo de novo, mas o conceito de tradução contextual conservativa coincide com o conceito de tradução conservativa. Pois, pela Proposição 3.13, se t é uma tradução conservativa, então temos a ida da definição acima, e, por um procedimento análogo, temos a volta. Claramente, se t é uma tradução contextual conservativa, tomando $n = 1$, t é uma tradução conservativa.

A seguir observamos que as funções de interpretação relevantes de uma lógica nos seus modelos são casos particulares de traduções, traduções contextuais abstratas e, principalmente, de traduções conservativas.

4 Traduções e interpretações entre lógicas

Para que um sistema dedutivo tenha um definitivo *status* de lógica, usualmente é exigido para ele um ambiente semântico, ou mais especificamente, um modelo que seja correto e completo. A parte sintática é constituída sobre uma linguagem formal e o aparato dedutivo fica estabelecido sobre as fórmulas ou sentenças bem formadas daquela lógica. Em geral, este contexto dedutivo é bastante preciso, mas pouco intuitivo. O modelo é que tem a incumbência de trazer significados, explicações e alguns aspectos que são idealizados no contexto formal para aquela lógica.

Para este vínculo entre sintaxe e semântica, definem-se funções de interpretação que levam cada expressão sintática bem formada num único elemento do modelo, e é esperado que este modelo possa dar boas informações para as expressões formais.

Contudo, não é usual uma função no sentido contrário. Por isto o nome de função de interpretação.

Segundo os desenvolvimentos anteriores, cada função de interpretação vai de uma lógica abstrata (E_1, C_1) em uma lógica modelo (E_2, C_2) e deve ser vista como um caso particular de tradução.

Se (E_1, C_1) e (E_2, C_2) são lógicas abstratas como acima e $\xi: E_1 \rightarrow E_2$ é uma função de interpretação, então a lógica (E_1, C_1) é *fortemente correta* segundo o modelo (E_2, C_2) se a função ξ é uma tradução. A lógica (E_1, C_1) é *fortemente completa* segundo o modelo (E_2, C_2) se a função ξ é uma tradução conservativa. A lógica (E_1, C_1) é simplesmente *correta e completa* segundo o modelo (E_2, C_2) se a função ξ é uma aplicação conservativa.

A notação usual para uma lógica fortemente correta e completa é: para $A \cup \{x\} \subseteq E$, $A \vdash x$ se, e somente se, $A \models x$. Mas esta última consequência é entendida pelo fato de todo modelo de A ser também modelo de x . Para sermos mais precisos, neste segundo caso, estamos numa outra lógica abstrata, a lógica modelo, e embora não esteja aí indicado na notação, há uma função interpretação da lógica no modelo.

Como podemos variar muito as lógicas e os modelos, é certo que apenas alguns modelos são adequados para certa lógica. Por exemplo, para a lógica proposicional clássica, apenas modelos Booleanos são adequados. Estes modelos podem ser algébricos, matriciais, de valorações ou de Kripke, entre outros, mas precisam explicitar as características Booleanas da lógica clássica.

Diante disso, as combinações não podem ser quaisquer. Há que se deixar muito claro qual é a lógica e qual o seu modelo.

Dadas as lógicas abstratas (E_1, C_1) e (E_2, C_2) e uma função de interpretação $\xi: E_1 \rightarrow E_2$, podemos pensar também num conceito que preserve meta-propriedades da lógica abstrata na lógica modelo. A lógica (E_1, C_1) é *contextualmente correta* segundo o modelo (E_2, C_2) se a função ξ é uma tradução contextual.

5 Funções e traduções

Veremos algumas definições adicionais de funções que estão vinculadas com as traduções, conforme (FEITOSA, 1997).

5.1 Funções contínuas como par de funções

Dada uma lógica (E, C) , o conjunto de todos os conjuntos fechados ou teorias de (E, C) será denotado por $\mathcal{F}(E)$.

Sejam (E_1, C_1) e (E_2, C_2) duas lógicas. Uma *função contínua* de (E_1, C_1) em (E_2, C_2) é um par de funções (f, F) , $f: E_1 \rightarrow E_2$ e $F: \mathcal{F}(E_2) \rightarrow \mathcal{F}(E_1)$, de maneira que, para todos $x \in E_1$, $B \in \mathcal{F}(E_2)$ tem-se:

$$x \in F(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Teorema 5.1: Sejam (E_1, C_1) e (E_2, C_2) duas lógicas. Uma função $t: E_1 \rightarrow E_2$ é tradução se, e somente se, existe T tal que (t, T) é contínua.

Demonstração: (\Rightarrow) Se t é uma tradução, define-se $T: \mathcal{F}(E_2) \rightarrow \mathcal{F}(E_1)$ por $T(B) = t^{-1}(B)$, para cada fechado B de (E_2, C_2) . Com isto, $x \in T(B) \Leftrightarrow x \in t^{-1}(B) \Leftrightarrow t(x) \in t(t^{-1}(B)) \subseteq B$. Logo, (t, T) é contínua. (\Leftarrow) Sejam (t, T) contínua e $B \in \mathcal{F}(E_2)$. Então $x \in T(B) \Leftrightarrow t(x) \in B \Leftrightarrow x \in t^{-1}(B)$. Desse modo, $t^{-1}(B) = T(B)$ e como $T(B) \in \mathcal{F}(E_1)$, então $t^{-1}(B)$ é um fechado de (E_1, C_1) . Portanto, t é uma tradução. ■

Este resultado não é surpreendente, visto que já mostramos que uma função é tradução se, e somente se, a imagem inversa de cada conjunto fechado segundo a função é ainda um conjunto fechado. Algum mérito da definição está em explicitar duas funções que estão presentes no conceito de tradução e nem sempre são observadas.

5.2 O conceito de tradução modelo teórica

Tentamos um elo entre os conceitos de lógica abstratas em contextos sintático e semântico.

Sejam (E_1, C_1) e (E_2, C_2) duas lógicas e $\text{Est}(E_1)$ e $\text{Est}(E_2)$ os conjuntos de estruturas associados a (E_1, C_1) e (E_2, C_2) , respectivamente. Uma função $t: E_1 \rightarrow E_2$ é uma *tradução modelo teórica* se existe uma função parcial $F: \text{Est}(E_2) \rightarrow \text{Est}(E_1)$ tal que, para todo $x \in E_1$ e todo $\mathfrak{C} \in \text{Est}(E_2)$:

$$\mathfrak{C} \models t(x) \Leftrightarrow F(\mathfrak{C}) \models x.$$

Proposição 5.2: Sejam (E_1, C_1) e (E_2, C_2) lógicas com semânticas adequadas (corretas e completas) e t uma tradução modelo teórica entre elas. Se F é a função que associa modelos adequados da lógica (E_2, C_2) com modelos adequados de (E_1, C_1) , então:

$$\vdash x \Rightarrow \vdash t(x).$$

Demonstração: Se $\nVdash t(x)$, pela completude de (E_2, C_2) , então $\nVdash t(x)$. Dessa maneira, existe um modelo $\mathfrak{B} \in \text{Mod}(E_2)$ tal que $\mathfrak{B} \nVdash t(x)$. Então, $F(\mathfrak{B}) \in \text{Mod}(E_1)$ e $F(\mathfrak{B}) \nVdash x$, ou seja, $\nVdash x$. Pela correção de (E_1, C_1) , segue que $\nVdash x$. ■

A recíproca da implicação da proposição anterior não é imediata, pois pode existir algum $\mathcal{D} \in \text{Mod}(E_1)$, tal que $\mathcal{D} \notin \text{Im}(F)$. Assim, mesmo sabendo que $t(x)$ é um teorema de (E_2, C_2) , não é possível decidir sobre x em (E_1, C_1) .

Proposição 5.3: Sejam (E_1, C_1) e (E_2, C_2) lógicas com semânticas adequadas (corretas e completas) e t uma tradução modelo teórica entre elas. Se para $\mathfrak{B} \in \text{Mod}(L)$ tal que $\mathfrak{B} \nVdash x$, existe $\mathcal{A} \in \text{Mod}(M)$ de forma que $F(\mathcal{A}) = \mathfrak{B}$, então a função t é uma aplicação conservativa.

Demonstração: Se $\nVdash x$, então $\nVdash x$ e, daí, existe $\mathfrak{B} \in \text{Mod}(E_1)$ tal que $\mathfrak{B} \models x$. Então, existe $\mathcal{A} \in \text{Mod}(E_2)$ com $F(\mathcal{A}) = \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B} \models x$. Assim, $\mathcal{A} \models t(x)$ e, portanto, $\nVdash t(x)$, ou seja, $\nVdash t(x)$. ■

A conservatividade, localmente, exige que para cada modelo $\mathfrak{B} \in \text{Mod}(E_1)$ que satisfaz x , esteja associado um modelo $\mathcal{A} \in \text{Mod}(E_2)$ que satisfaz $t(x)$ e vice-versa.

Corolário 5.4: Se (E_1, C_1) e (E_2, C_2) são lógicas com semânticas fortemente adequadas e t é tradução modelo teórica, tal que F associa modelos fortemente adequados de (E_2, C_2) a modelos fortemente adequados de (E_1, C_1) , então t é tradução.

Demonstração: Se $t(\mathfrak{B}) \nVdash t(x)$, então $t(\mathfrak{B}) \nVdash t(x)$. Daí, existe $\mathfrak{B} \in \text{Mod}(E_2)$ tal que, $\mathfrak{B} \models$

$t(B)$ e $\mathcal{B} \not\models t(x)$. Logo, $F(\mathcal{B}) \models B$ e $F(\mathcal{B}) \not\models x$, ou seja, $B \not\models x$ e, também, $B \not\models x$. ■

Corolário 5.5: Sejam (E_1, C_1) , (E_2, C_2) e t como acima. Se para cada $\mathcal{B} \in \text{Mod}(E_1)$, com $\mathcal{B} \not\models x$, existe $\mathcal{A} \in \text{Mod}(E_2)$ de forma que $F(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, então a tradução t é conservativa.

Demonstração: Se $B \not\models x$, então $B \not\models x$. Assim, existe $\mathcal{B} \in \text{Mod}(E_1)$ de maneira que $\mathcal{B} \models B$ e $\mathcal{B} \not\models x$. Daí, existe $\mathcal{A} \in \text{Mod}(E_2)$ tal que, $F(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Portanto, $\mathcal{A} \models t(B)$ e $\mathcal{A} \not\models t(x)$. ■

Corolário 5.6: Sejam (E_1, C_1) , (E_2, C_2) e t como no Corolário 5.4 e F sobrejetiva, então a tradução t é contextual abstrata.

Demonstração: Se $t(B_1) \vdash t(x_1), \dots, t(B_n) \vdash t(x_n)$ e $t(B) \not\models t(x)$, então $t(B_1) \models t(x_1), \dots, t(B_n) \models t(x_n)$ e $t(B) \not\models t(x)$. Por uma demonstração análoga à demonstração do Corolário 5.4, temos que $B \not\models x$. Como F é sobrejetiva, podemos considerar $\mathcal{B} = F(\mathcal{A}) \in \text{Est}(E_1)$ tal que $F(\mathcal{A}) \models B_i$, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{A} \models t(B_i)$. Logo, $\mathcal{A} \models t(x_i)$ e $F(\mathcal{A}) \models x_i$, daí, $B_i \models x_i$. Portanto, $B_i \vdash x_i$ e contudo $B \not\models x$. ■

O conceito de tradução modelo teórica, com as restrições impostas nos resultados acima, permitem um vínculo simples com as traduções, lógicas e modelos abstratos.

A seguir, buscaremos a partir do conceito geral de algumas semânticas bem conhecidas, evidenciar procedimentos simples que geram modelos semânticos de Tarski.

6 Lógicas abstratas vindas das semânticas usuais

Mostramos, a seguir, como podemos obter lógicas abstratas a partir de algumas noções de modelos lógicos.

6.1 As K -valorações

O conceito universal de valoração adotado a seguir foi proposto pelo professor Newton C. A. da Costa, como uma abstração do conceito usual de valoração Booleana ou das valorações para lógicas multivaloradas. Seguimos a apresentação de (De Souza, 2001).

Dado um conjunto E , seja K uma família de subconjuntos de E , isto é, $K \subseteq \mathcal{P}(E)$. Cada elemento de K é uma K -valoração para E .

Se $A \subseteq E$, então o conjunto dos K -modelos de A é dado por $\text{Mod}_K(A) = \{V \in K : A \subseteq V\}$.

Segue desta definição, que quando $A = \{x\}$, um conjunto unitário, então:

$$\text{Mod}_K(\{x\}) = \text{Mod}_K(x) = \{V \in K : \{x\} \subseteq V\} = \{V \in K : x \in V\}.$$

O conjunto das consequências de A , segundo esta concepção, é definida por:

$$C_K(A) = \{x \in E : \text{Mod}_K(A) \subseteq \text{Mod}_K(x)\}.$$

Isto está de acordo com nossa concepção de consequência semântica:

$$x \in C_K(A) \Leftrightarrow A \models x \Leftrightarrow \text{todo } K\text{-modelo de } A \text{ é também } K\text{-modelo de } x.$$

Proposição 6.1: Se K é uma K -valoração sobre E , então a relação de consequência C_K é um operador de consequência sobre E .

Demonstração: Ver (De Souza, 2001). ■

6.2 Matrizes abstratas

As matrizes lógicas são modelos lógicos bastante investigados, inicialmente aplicados em lógicas multivaloradas.

Numa lógica multivalorada podemos ter conjunto de elementos válidos como mais de um membro. Chamamos a este de o conjunto dos elementos distinguidos e a relação de consequência preserva a validade a partir destes elementos. Para mais

detalhes, ver (BOLC; BOROVIĆ, 1992).

A seguir, introduzimos uma definição de operador de consequência que resgata aspectos dos modelos matriciais.

Sejam E um conjunto e $D \subseteq E$. Definimos $C_D: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ por:

$$(i) A \cap D = \emptyset \Rightarrow C_D(A) = A$$

$$(ii) A \cap D \neq \emptyset \Rightarrow C_D(A) = A \cup D.$$

Evidentemente, a partir de (ii), se $A \subseteq D$, então $C_D(A) = D$. A motivação é que se um elemento está no conjunto dos elementos distinguidos, então sua imagem é o conjunto todo de distinguidos. Se o elemento é disjunto dos elementos distinguidos, então o operador não atua e se há uma intersecção entre elementos de A e D , então $C_D(A) = C_D((A \cap D) \cup (A - D)) = C_D(A \cap D) \cup C_D(A - D) = D \cup (A - D) = A \cup D$.

Proposição 6.2: Se E é um conjunto, $D \subseteq E$ e $C_D: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ satisfaz as condições

(i) e (ii) acima, então C_D é um operador de consequência sobre E .

Demonstração: Consideremos A e B subconjuntos de E . (i) Segue imediatamente da definição que $A \subseteq C_D(A)$. (ii) Se $A \subseteq B$ e $A \cap D = B \cap D = \emptyset$, então $C_D(A) = A \subseteq B = C_D(B)$. Se $A \subseteq B$, $A \cap D = \emptyset$ e $B \cap D \neq \emptyset$, então $C_D(A) = A \subseteq B \subseteq B \cup D = C_D(B)$. Se $A \subseteq B$, $A \cap D \neq \emptyset$, segue que $B \cap D \neq \emptyset$, então $C_D(A) = A \cup D \subseteq B \cup D = C_D(B)$. (iii) Se $A \cap D = \emptyset$, então $C_D(C_D(A)) = C_D(A)$ e se $A \cap D \neq \emptyset$, então $C_D(C_D(A)) = C_D(A \cup D) = (A \cup D) \cup D = A \cup D = C_D(A)$. Portanto, $C_D(C_D(A)) \subseteq C_D(A)$. ■

6.3 Modelos abstratos Lindenbaum-Tarski motivados

Precisaremos do conceito de relação de equivalência.

Sejam (E, C) uma lógica e B um conjunto qualquer. Dada uma função $f: E \rightarrow B$, o operador C_B coinduzido por f e (E, C) em B é definido por: se $X \subseteq B$, então X é fechado em B se, e somente se, $f^{-1}(X)$ é fechado em (E, C) .

Sejam (E, C) uma lógica e \equiv uma relação de equivalência sobre E . A função Q :

$E \rightarrow E_{\equiv}$, definida por $Q(x) = [x]$, que leva cada elemento de E na sua classe de equivalência módulo \equiv é a *função quociente* relativa à relação \equiv .

Se C_{\equiv} é o operador de consequência coinduzido por (E, C) e Q , então o par $(E|_{\equiv}, C_{\equiv})$ é a *lógica quociente* coinduzida por (E, C) e Q .

Proposição 6.3: Sejam (E_1, C_1) , (E_2, C_2) e (E_3, C_3) lógicas e $t_1: E_1 \rightarrow E_2$ e $t_2: E_2 \rightarrow E_3$ funções. Se a lógica (E_2, C_2) é coinduzida por (E_1, C_1) e t_1 , então t_2 é tradução se, e somente se, $t_2 \circ t_1$ é tradução.

Demonstração: (\Rightarrow) Se t_2 é uma tradução, desde que t_1 é tradução, segue que a composição $t_2 \circ t_1$ é uma tradução. (\Leftarrow) Por outro lado, sejam $t_2 \circ t_1$ uma tradução e C um fechado de (E_3, C_3) . Como $t_2 \circ t_1$ é tradução, segue que $(t_2 \circ t_1)^{-1}(C) = (t_1)^{-1}((t_2)^{-1}(C))$ é um fechado de (E_1, C_1) . Agora, sendo (E_2, C_2) a lógica coinduzida por (E_1, C_1) e t_1 , tem-se que $(t_2)^{-1}(C)$ é um fechado de (E_2, C_2) e, portanto, t_2 é tradução. ■

Proposição 6.4: Sejam (E_1, C_1) , (E_2, C_2) e (E_3, C_3) lógicas e $t_1: E_1 \rightarrow E_2$ e $t_2: E_2 \rightarrow E_3$ funções. Se (E_2, C_2) é a lógica induzida por (E_3, C_3) e t_2 , então t_1 é tradução se, e somente se, $t_2 \circ t_1$ é tradução.

Demonstração: (\Rightarrow) Se t_1 é uma tradução, desde que t_2 é tradução, segue que a composição $t_2 \circ t_1$ é uma tradução. (\Leftarrow) Por outro lado, sejam $t_2 \circ t_1$ uma tradução e B um fechado de (E_2, C_2) . Por definição, existe um fechado C de (E_3, C_3) tal que $(t_2)^{-1}(C) = B$. Como $t_2 \circ t_1$ é tradução, segue que $(t_2 \circ t_1)^{-1}(C) = (t_1)^{-1}((t_2)^{-1}(C)) = (t_1)^{-1}(B)$ é um fechado de (E_1, C_1) e, portanto, t_1 é uma tradução. ■

Uma função $f: A \rightarrow B$ é *compatível* com uma relação de equivalência \equiv em A , quando:

$$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Proposição 6.5: Sejam (E_1, C_1) , (E_2, C_2) duas lógicas e $t: E_1 \rightarrow E_2$ uma tradução. Se t é compatível com uma relação de equivalência \equiv em E_1 , então existe uma única aplicação $T: E_{1\equiv} \rightarrow E_2$ tal que $T \circ Q = t$, em que Q é a aplicação quociente. A aplicação T é uma tradução.

Demonstração: Define-se $T: E_{1\equiv} \rightarrow E_2$ por $T([x]) = t(x)$. A aplicação T está bem definida, dada a compatibilidade de t . Além disso, $ToQ(x) = T([x]) = t(x)$, ou seja, $ToQ = t$.

Agora, seja $F: E_{1\equiv} \rightarrow E_2$ outra aplicação tal que $t = ToQ = FoQ$. Como Q é sobrejetiva, então admite inversa à direita e, portanto, $T = To(QoQ^{-1}) = Fo(QoQ^{-1}) = F$.

Resta verificar que T é uma tradução. Se B um fechado de E_2 , como t é uma tradução, então $t^{-1}(B) = (ToQ)^{-1}(B) = Q^{-1}oT^{-1}(B)$ é um fechado de E_1 . Daí, como Q é a função quociente, segue que $T^{-1}(B)$ é um fechado de $E_{1\equiv}$. ■

Dada a lógica (E, C) , consideramos a relação de equivalência definida sobre E por:

$$x \sim y \Leftrightarrow C(x) = C(y).$$

A aplicação $Q: E \rightarrow E_{\sim}$, dada por:

$$Q(x) = [x] = \{y : x \sim y\}$$

é uma tradução e (L_{\sim}, C_{\sim}) é a lógica quociente coinduzida por Q e (E, C) .

Proposição 6.7: A aplicação $Q: E \rightarrow E_{\sim}$ é uma tradução conservativa.

Demonstração: Pela afirmação acima, Q é uma tradução. Agora, se $Q(A) = \{[x] : x \in A\}$ e $Q(x) \in C_{\sim}(Q(A))$ então, para algum $y \in [x]$, tem-se que $y \in C(A)$. Como $C(y) = C(x)$, segue que $x \in C(y)$ e, portanto, $x \in C(A)$. ■

Agora, vinculamos o conceito de função quociente com tradução contextual abstrata.

Proposição 6.8: A aplicação $Q: E \rightarrow E_{\sim}$ é uma tradução contextual abstrata.

Demonstração: Suponhamos que, para $A_i \cup \{x_i\} \subseteq E$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos $x_1 \in C(A_1), \dots, x_{n-1} \in C(A_{n-1}) \Rightarrow x_n \in C(A_n)$ e $Q(x_1) \in C_{\sim}(Q(A_1)), \dots, Q(x_{n-1}) \in C_{\sim}(Q(A_{n-1}))$. Então, por Q ser uma tradução conservativa, temos $x_n \in C(A_n)$ e, por ser uma tradução, $Q(x_n) \in C_{\sim}(Q(A_n))$. ■

Pois bem, as álgebras de Lindenbaum são obtidas por uma relação de

equivalência módulo a dedutibilidade, conforme uma versão generalizada dada pela função Q acima e o modelo algébrico correspondente é a álgebra das fórmulas passado o quociente por esta relação de equivalência. Assim, a função interpretação coincide com a função Q que é uma tradução conservativa, contextual abstrata e sobrejetiva.

Devido a estas características os modelos Lindenbaum-Tarski são muito destacados, pois não apenas dão a adequação da lógica relativa ao seu modelo algébrico Lindenbaum-Tarski, mas fazem a ponte de resultados do ambiente sintático para o semântico e também o contrário, de modo muito simples e imediato.

Considerações Finais

O presente trabalho resgatou algumas características sintáticas e semânticas de lógicas por meio de uma visão abstrata bem geral e introduziu alguns novos desenvolvimentos teóricos das lógicas abstratas.

O conceito de traduções entre lógicas foi utilizado para definir noções importantes no âmbito da lógica, como o de uma lógica ser correta, completa, fortemente correta e fortemente completa segundo um modelo. Os desenvolvimentos teóricos sobre traduções já estão desenvolvidos. Nossa contribuição está em dispor estes conceitos teóricos com as usuais noções de correção e completude lógicas.

Além disso, num contexto topológico, o conceito de função contínua é associado ao de tradução, o que foi destacado no texto.

Algumas semânticas usuais, especificamente as K -valorações de Newton C. A. da Costa, a nossa proposta de matrizes abstratas e as álgebras de Lindenbaum foram utilizadas para obter lógicas abstratas.

Nossa proposta foi trabalhar com uma noção de lógica bem abstrata e ampla, para a qual optamos pela definição de lógica de acordo com Tarski. Este ambiente abstrato e geral é interessante por abranger uma grande quantidade de lógicas. Claramente, com a definição que temos utilizado não consideramos lógicas não monotônicas, por exemplo. Porém, dependendo do interesse do estudo, podemos tomar, ao invés do operador de consequência de Tarski, outro operador, como o operador cumulativo encontrado em (Gabbay, 1985) tal que a propriedade da monotonicidade seja substituída pela propriedade: $A \subseteq B \subseteq C(A) \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$, denominada por Gabbay de *monotonicidade fraca* e, posteriormente, monotonicidade cautelosa por Makinson (1989). Desta forma, caso tivéssemos interesse em trabalhar com aspectos

não monotônicos das lógicas, poderíamos adotar a definição de lógica abstrata com o operador cumulativo.

Muitos são os caminhos para continuarmos o estudo iniciado neste artigo que podem vir do estudo de novas características em lógicas abstratas ou da mudança do operador de consequência de Tarski por outro que convenha. Também podemos incluir aspectos da linguagem L , ainda em uma versão bastante abstrata. Mas julgamos que ainda podemos refinar noções de lógica apenas neste ambiente conjuntista.

Referências

- BEZIAU, J-Y. Universal logic. In: T. CHILDERS; O. MAJER (Eds.). *Proceedings of the 8th International Colloquium - Logica '94*, p. 73-93. Prague: Czech Academy of Sciences, 2004.
- _____. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In: BEZIAU, J-Y. (Ed.) *Logica universalis*. Birkhäuser, p. 3-19. Basel, 2007.
- BOLC, L., BOROWIK, P. *Many-valued logics: 1 theoretical foundations*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E.; D'OTTAVIANO, I. M. L. New dimensions on translations between logics. In: *Proceedings of the II World Congress on Universal Logic*, p. 44-54. Xi'an: UNILOG'07, 2007.
- DE SOUZA, E. G. Lindenbaumologia I: a teoria geral. In: *Cognitio: Revista de Filosofia*, n. 2, p. 213-219, 2001.
- _____. Lindenbaumologia II: a teoria geral. In: *Cognitio: Revista de Filosofia*, n. 3, p. 115-121, 2002.
- D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. Deductive systems and translations. In: BÉZIAU, J.-Y.; COSTA-LEITE, A. (Ed.). *Perspectives on Universal Logic*, p. 125-157. Italy: Polimetrica, 2007.
- FEITOSA, H. A. *Traduções conservativas*. Tese de Doutorado, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 1997.
- FEITOSA, H. A., D'OTTAVIANO, I. M. L. Conservative translations. *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 108, p. 205-227, 2001.
- FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; SILVESTRINI, L. H. C. Confrontando propriedades lógicas em um contexto de lógica universal. *Cognitio: Revista de Filosofia*, v. 15, n. 2, p. 333-347, 2014.
- GABBAY, D. M. Theoretical foundations for non monotonic reasoning. In: K. Apt (Ed.) *Expert systems, logics and models of concurrent systems*, p. 439-459. Berlin: Springer - Verlag, 1985.
- GENTZEN, G. Investigation into logical deduction. In: SZABO, M. E. (Ed.) *The collected papers of Gerhard Gentzen*, p. 68-131. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.
- HOPPMANN, A. G. *Fecho e imersão*. Tese de Doutorado em Matemática. Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, Rio Claro, 1973.
- MARTIN, N. M.; POLLARD, S. *Closure spaces and logic*. Dordrecht: Kluwer, 1996.
- MAKINSON, D. General theory of cumulative inference. In: REINFRANK, M. *et al.* (Eds.) *Non-monotonic Reasoning*, v. 346, p. 1-18. Berlin: Springer - Verlag, 1989.
- SAUTTER, F. T; FEITOSA, H. A. Lógicas paraclássicas: exposição, defesa e

problemas. In: *Cognitio: Revista de Filosofia*, v. 6, n. 1, p. 85-93, 2005.

SMULLYAN, R. M. *First-order logic*. New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.

TARSKI, A. *Logic, semantics, metamathematics*. 2. ed. J. Corcoran (Ed.). Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983.

WALLMANN, C. A shared framework for consequence operations and abstract model theory. In: *Logica Universalis*, v. 7, p. 125-145, 2013.

WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi*. Dordrecht: Kluwer, 1988.

Apoio

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro da FAPESP e do CNPq.